

Streszczenie rozprawy doktorskiej

"Groupoid Banach algebras, weighted composition operators on L^p -spaces and transfer operators"

Rozprawa przedstawia i zestawia ze sobą wybrane wyniki autora i współautorów z prac [Bar24], [BK21], [BK24], [BK26], [BKL24], [BKM25], [BKM26], a także zawiera pewne ich uogólnienia i uzupełnienia. W szczególności ogólne wyniki dla algebr grupoidowych, takie jak opis reprezentacji czy kryteria prostoty otrzymane w [BKM25], [BKM26], zilustrowane są poprzez zastosowanie ich do L^p -algebr operatorowych zadanych przez ogólne (częściowe) lokalne homeomorfizmy, które do tej pory były rozpatrywane tylko w szczególnym przypadku algebr grafowych lub dla C^* -algebr (gdy $p = 2$). Zastosowania te umożliwiły konstrukcję i analizę L^p -wersji produktów krzyżowych przez operator przejścia, w tym uogólnienie pewnych C^* -algebraicznych wyników z [BKL24], a w dalszej kolejności uogólnienie twierdzenia o widmie operatorów ważonej kompozycji na przestrzeniach Hilberta, udowodnione w [BK21], na przypadek operatorów działających na przestrzeniach L^p . Załączek tych badań oraz ich zastosowań do opisu widma operatorów ważonej kompozycji można znaleźć w [Bar24]. Dodatkowo rozprawa zawiera kompletny dowód twierdzenia Lampertiego, charakteryzującego niekoniecznie odwracalne izometrie między przestrzeniami L^p dla miar lokalizowalnych i $p \in [1, \infty)$.

Nadrzędnym celem niniejszej rozprawy jest przedstawienie podstaw teorii algebr Banacha związanych z étalnymi grupoidami Hausdorffa, które zostały wprowadzone w pracach [BKM25], [BKM26], dla skreślonych grupoidów niekoniecznie spełniających warunek Hausdorffa. Ograniczenie się do grupoidów Hausdorffa jest podyktowane kilkoma powodami. Po pierwsze pozwala to na uniknięcie pewnych technicznych niuansów, co upraszcza prezentację i ułatwia zapoznanie się z omawianą teorią. Po drugie pewne fakty i twierdzenia można udowodnić poprzez prostsze rozumowania, przez co niektóre dowody w tej rozprawie różnią się od dowodów w [BKM25], [BKM26]. Po trzecie wielu badaczy jest zainteresowanych wyłącznie tym regularnym przypadkiem, gdyż w wielu zastosowaniach pojawiające się grupoidy są Hausdorffa. W szczególności dla celów niniejszej rozprawy jest to przypadek wystarczający, gdyż ogólną teorię stosujemy tu głównie do tak zwanych *grupoidów Renault-Deaconu*, które są grupoidami Hausdorffa.

Głównymi ogólnymi wynikami, obejmującymi szerokie klasy algebr Banacha związanych z grupoidami Hausdorffa, są kryteria prostoty oraz twierdzenie o integracji i dezintegracji reprezentacji. To drugie twierdzenie jest opisem reprezentacji algebr grupoidowych przez reprezentacje kowariantne odpowiedniego działania półgrupy inwersyjnej. To narzędzie

daje szczególnie dobre rezultaty dla reprezentacji na przestrzeniach funkcji całkowalnych w p -tej potęgde $L^p(\mu)$, dla $p \in [1, \infty]$, gdzie pozwala na dobre oszacowania norm a także przestrzenny opis takich reprezentacji przez operatory mnożenia. Kluczową rolę pełnią tu uogólnienia Twierdzenia Banacha-Lampertiego charakteryzujące odwracalne izometrie w przestrzeniach L^p dla $p \neq 2$. Takie twierdzenia znane są w różnym stopniu ogólności i często są niepoprawnie formułowane już dla miar σ -skończonych. Dlatego w rozprawie zamieszczono pełny dowód ogólnej charakteryzacji dowolnych izometrii na przestrzeniach L^p , dla $p \neq 2$, związanych z miarami lokalizowalnymi. Z dokładnością do izometrycznego izomorfizmu przestrzeń L^p , związane z miarami lokalizowalnymi, obejmują wszystkie przestrzenie L^p .

Główne nowe zastosowania omówionej teorii dotyczą widma operatorów i algebr związanych z operatorem przejścia $\mathcal{L} : C(X) \rightarrow C(X)$ dla lokalnego homeomorfizmu $\varphi : X \rightarrow X$ na zwartej przestrzeni Hausdorffa X . Mianowicie, w rozprawie został zdefiniowany L^p -produkt krzyżowy $C(X)$ przez L jako algebra Banacha $F^p(\mathcal{L})$ uniwersalna ze względu na reprezentacje kowariantne operatora $\mathcal{L}$ na przestrzeniach L^p . Wykazano, że ta algebra jest kanonicznie izometrycznie izomorficzna z L^p -algebrą operatorową groupoidu Renault-Deaconu odwzorowania φ . Prowadzi to do naturalnej charakteryzacji prostoty algebry $F^p(\mathcal{L})$ oraz pozwala na opis widma operatorów ważonej kompozycji generujących algebrę $F^p(\mathcal{L})$. Uogólnia to analogiczne wyniki otrzymane wcześniej w [BKL24], [BK21] oraz przez innych badaczy w przypadku $p = 2$.

- [Bar24] K. Bardadyn, *L^p -Cuntz algebras and spectrum of weighted composition operators*, Geometric Methods in Physics XL, Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2024, 189–198.
- [BK21] K. Bardadyn, B. K. Kwaśniewski, *Spectrum of weighted isometries*, Israel J. Math. **246** (2021), no. 1, 149–210.
- [BK24] K. Bardadyn, B. K. Kwaśniewski, *Topologically free actions and ideals in twisted Banach algebra crossed products*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **156**(1) (2026), 157–187.
- [BK26] K. Bardadyn, B. K. Kwaśniewski, *Banach algebra crossed products by inverse semigroup actions*, to appear in Proceedings of the XLII Workshop on Geometric Methods in Physics, Trends in Mathematics, Birkhäuser, arXiv:2601.14907
- [BKL24] K. Bardadyn, B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev, *C^* -algebras associated to transfer operators for countable-to-one maps*, Integr. Equ. Oper. Theory **96** (2024), 25.
- [BKM25] K. Bardadyn, B. Kwaśniewski, A. McKee, *Banach algebras associated to twisted étale groupoids*, J. Funct. Anal. **289** (2025), no. 12, 1–66.
- [BKM26] K. Bardadyn, B. Kwaśniewski, A. McKee, *Banach algebras associated to twisted étale groupoids: simplicity and pure infiniteness*, arXiv:2406.05717, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.