Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki

Kordian Czyżewski

Częściowe izometrie w przestrzeniach L_p

Praca magisterska napisana
pod kierunkiem
dr. hab. Bartosza Kwaśniewskiego

Białystok 2022

Spis treści

Wstęp

Pojęcie izometrii częściowej w przestrzeni Hilberta jest dobrze ugruntowane. Od blisko już stu lat izometrie częściowe pełnią podstawową rolę w teorii operatorów i teorii algebr von Neumanna, oraz od wielu dekad w teorii C^*-algebr zadanych przez generatory i relacje (patrz np. [7, 15, 19, 20, 21, 22, 31]). W 2004 roku Mbektha [19] zaproponował definicję *izometrii częściowych na przestrzeni Banacha* jako kontraktywnych operatorów posiadających kontraktywne odwrotności uogólnione; operatory S, T są *sprzeżonymi ze sobą izometriami częściowymi* jeśli

$$\|T\|, \|S\| \leqslant 1, \qquad TST = T, \quad STS = S. \tag{1}$$

Operatory spełniające (1) pełnią kluczową rolę m.in. w rozprawie doktorskiej promotora niniejszej pracy magisterskiej (patrz [14]). Na ogół powyżej zdefiniowane izometrie częściowe nie posiadają dobrych własności. Na przykład na wielu przestrzeniach Banacha istnieją izometrie niebędące izometriami częściowymi, a sprzężenie izometrii częściowej nie jest wyznaczone jednoznacznie. Z drugiej strony przestrzenie L_p wydają się wystarczająco bliskie przestrzeniom Hilberta, aby na tych przestrzeniach warunki (1) dawały dobre uogólnienie klasycznego pojęcia. W szczególności w przestrzeniach L_p znane są strukturalne opisy izometrii oraz kontraktywnych rzutów, które są podstawowymi przykładami i składnikami konstrukcyjnymi izometrii częściowych.

Dodatkową motywacją do powstania tej pracy są badania zapoczątkowane przez Phillipsa w 2012 roku [8, 10, 11, 23, 24], które są próbą przeniesienia pewnych konstrukcji i wyników dotyczących algebr operatorowych, działających w przestrzeniach Hilberta na algebry działające w przestrzeniach L_p. Kluczowym pojęciem są tu *przestrzenne izometrie częściowe* działające w przestrzeniach L_p, które Phillips zdefiniował jako operatory dane konkretnymi wzorami. Phillips nie znał pracy Mbekhty [19], a obu panów przedstawił sobie w 2015 roku (podczas konferencji Banach Algebras and Applications w Toronto) promotor niniejszej pracy magisterskiej.

Celem obecnej pracy jest szczegółowa analiza i jawny opis cześciowych izometrii w sensie Mbekhty, działających w przestrzeniach $L_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, związnych z miarą skończoną μ, oraz wyjaśnienie związków tak zdefiniowanego pojęcia z przestrzennymi izometriami częściowymi Phillipsa. Wymaga to m.in. opracowania i połączenia dwóch nietrywialnych, ale znanych kroków:

1) scharakteryzowania kontraktywnych rzutów na przestrzeniach L_p (Twierdzenie Ando) jako ważonych warunkowych wartości oczekiwanych [1, 9, 25].

2) scharakteryzowania izometrii w przestrzeniach L_p (Twierdzenie Banacha-Lampertiego) jako uogólnionych ważonych operatorów kompozycji [17, 11, 10].

Praca w wyczerpujący sposób, z pełnymi dowodami, omawia powyższe wyniki. Wprowadzenie to jest obszerne, ale ma ten walor, że zaczynamy analizę od dobrze znanych pojęć takich jak warunkowa wartość oczekiwana, a następnie przechodzimy do ich bardziej abstrakcyjnych uogolnień (np. zespolona warunkowa wartość oczekiwana, obcięta wartość oczekiwana oraz ważona warunkowa wartość oczekiwana). W szczególności, rozważania nad Twierdzeniem Ando zostały poprzedzone analizą przypadku rzutów kontraktywnych w przestrzeni L_1 opierającą się na pracy Douglasa [9]. Zakładamy tu dodatkowo, że rozpatrywane rzuty zachowują funkcje stałe. Założenie to nie tylko upraszcza wiele dowodów, ale jest naturalne chociażby z punktu widzenia probabilistyki. Ponadto wydaje się, że bardzo efektywny opis z pracy Douglasa dowolnych kontraktywnych rzutów na L_1, można przenieść na przypadek przestrzeni L_p. Pozwoliłoby to uczynić otrzymany przez nas opis izometrii częściowych jeszcze bardziej eleganckim i stanowi jeden z możliwych kierunków kontynuacji niniejszej pracy.

Kolejny krok – opis izometrii w przestrzeniach L_p w oparciu o pracę Lampertiego [17] również natrafił na szereg trudności. Choć opis izometrii jako ważonych operatorów kompozycji jest prawdziwy, to konieczne było uzupełnienie w dowodzie luki obejmującej postać operatora kompozycji – wymagało szczegółowego rozpisania warunku jaki musiała spełniać funkcja wagowa, stanowiąca u Lampertiego po prostu pochodną Radona-Nikodýma dwóch miar.

Nietrywialnym zadaniem było połączenie kroków 1), 2) w całość. Co ciekawe szczególną trudność sprawiły, co jest już widoczne przy analizowaniu pojęcia rzutów kontraktywnych w przestrzeniach L_p, przypadki $p = 1$ i $p = 2$, wymagające osobnego potraktowania. Problemy te mają swoją przyczynę w specjalnym charakterze obydwu przestrzeni. W dowodach występują liczne odwołania do nierówności Jensena, a szczególnie jej ostrego przypadku dla funkcji ściśle wypukłych. Warunek ten spełniany jest przez normy przestrzeni L_p, dla $p > 1$, natomiast jego brak rodzi problem dla przestrzeni L_1. Przypadek $p = 2$ jest szczególny ze względu na mnogość obecnych tam symetrii. Bogata struktura przestrzeni L_2, będącej de facto przestrzenią Hilberta, wymaga dodatkowo założenia o dodatniości rzutów. Do analizy związków z przestrzennymi izometriami częściowymi użyliśmy dobrze ugruntowanego pojęcia *L_p-rzutu* badanego w różnych przestrzeniach Banacha przez wielu autorów (patrz np. [3, 30]). W ten sposób otrzymaliśmy szereg nowych rezultatów. Między innymi udowodniliśmy, że

(a) Każda izometria w przestrzeniach L_p jest izometrią częściową i posiadamy pełen opis ko-izometrii (Twierdzenie 5.13, Wniosek 5.14).

(b) Izometrie częściowe w przestrzeniach L_p posiadają jednoznacznie wyznaczone sprzężenie wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$. (Twierdzenie 5.16, Przykład 4.23).

(c) Każda izometria częściowa w przestrzeniach L_p, $p \in (1, \infty)\setminus\{2\}$, jest złożeniem ważonego operatora kompozycji oraz ważonej warunkowej wartości oczekiwanej. Dla $p = 1$ mogą się pojawić dodatkowe składniki w postaci pewnych operatorów nilpotentnych. Dla $p = 2$ powyższe zdanie jest prawdziwe jeśli ograniczymy się operatorów dodatnich.

(d) Dla $p \in (1, \infty) \setminus \{2\}$, izometrie częściowe $T : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ są sparametryzowane trójkami (h_μ, Φ, h_ν), gdzie $h_\mu \in L_p(\mu), h_\nu \in L_p(\nu)$ i $\Phi : \mathcal{M} \to \Phi(\mathcal{M})$ jest izomorfizmem σ-ciał, $\mathcal{M}$ i $\Phi(\mathcal{M})$ są σ-pociałami z elementami maksymalnymi odpowiednio $\mathrm{supp}(h_\nu)$ i $\mathrm{supp}(h_\mu)$ spełniającymi warunek

$$\frac{d\mu \circ \Phi}{d\nu|_{\mathcal{M}}} = \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|h_\nu|^p)}{T_{\Phi^{-1}}(|h_\mu|^p)},$$

gdzie $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest warunkową wartością oczekiwaną względem $\mathcal{M}$, a T_Φ to opertor kompozycji z Φ. Dla $p > 1$, dodatnie izometrie częściowe sparametryzowane są trójkami (h_μ, Φ, h_ν) jak wyżej, gdzie wagi $h_\mu \geqslant 0, h_\nu \geqslant 0$ są nieujemne (Twierdzenie 5.19).

(e) Przestrzene izometrie częściowe Phillipsa na przestrzeniach L_p, $p \neq 2$, to izometrie częściowe w sensie Mbekhty, których rzuty na przestrzeń inicjalną i finalną są L_p-ortogonalne (są L_p-rzutami).

Równoważność ta zachodzi dla każdego $p \geqslant 1$ jeśli ograniczymy się do operatorów dodatnich (Twierdzenie 5.23).

Jeżeli chodzi o ogólność pracy to rozważamy tu jedynie przypadek miar skończonych. Takie założenie jest naturalne ze względu szereg pojęć probabilistycznych jakimi operuje ta praca, ale również w wielu miejscach upraszcza prezentację i dowody. Uogólnienie powyższych wyników na przypadek miar σ-skończonych nie powinno nastręczać większych trudności. De facto wydaje się, że większość otrzymanych rezultatów można uogólnić na przypadek *miar lokalizowalnych* [10, 11] lub nawet *miar dowolnych* [4, 29]. Jest to kolejny potencjalny krok do dalszych badań. Ze względu chociażby na możliwe dalsze rozwinięcie w kierunku teorii spektralnej (patrz [14]), rozważamy przestrzenie L_p nie tylko nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, ale też i zespolonych $\mathbb{C}$. Jak pokazujemy w pracy, problem kompleksyfikacji i ostatecznie charakteryzacja jest słuszna zarówno dla przestrzeni nad ciałami liczb rzeczywistych jak i zespolonych

Struktura pracy przedstawia się następująco:

Rozdział 1 w całości poświęcony jest podstawowym pojęciom dotyczących przestrzeni Banacha, przestrzeni L_p z wyszczególnieniem przypadku przestrzeni Hilberta. Przypomniane zostają również elementarne pojęcia z teorii krat, do których będziemy się odwoływać w Rozdziale 3.

Rozdział 2 podsumowuje podstawowe informacje na temat izometrii częściowych – począwszy od dobrze znanego przypadku hilbertowskiego. W przypadku banachowskim prezentujemy kontrprzykłady ilustrujące pewne patologiczne sytuacje jakie występują w tak ogólnym podejściu.

Rozdział 3 poświęcony jest pojęciu warunkowej wartości oczekiwanej i jej charakteryzacji jako kontraktywnego rzutu na przestrzeni L_1. Dodatkowo przedstawiona została kompleksyfikacja operatora warunkowej wartości oczekiwanej i zespolona wersja Twierdzenia Douglasa.

W Rozdziale 4 rozważamy warunkowe wartości oczekiwane na przestrzeniach L_p i przedstawiamy ogólną charakteryzację rzutów kontrkaktywnych na przestrzeniach L_p – Twierdzenie Ando.

Rozdział 5 podzielony jest na dwie części. Pierwsza poświęcona jest dowodowi Twierdzeń Lampertiego i Banacha-Lampertiego, charakteryzujących odpowiednio izometrie i odwracalne izometrie w przestrzeniach L_p. Szczególną rolę w dowodach odgrywają użyteczne nierówności Clarksona, których obszerny rachunkowo dowód zamieszczony został w Dodatku A. Druga część Rozdziału 5 zawiera nasze najważniejsze wyniki dotyczące izometrii częściowych w przestrzeniach L_p opisane w punktach (a)–(e) powyżej.

Rozdział 1

Wprowadzenie do przestrzeni Banacha i przestrzeni L_p

W poniższym rozdziale przypomnimy podstawowe pojęcia dotyczące przestrzeni Banacha, ze szczególnym uwzględnieniem tytułowych przestrzeni L_p oraz struktury kraty jaka jest zadana na tych przestrzeniach. Osobno również omówimy fakty i twierdzenia dotyczące teorii przestrzeni Hilberta, które można traktować jako szczególny przypadek przestrzeni L_p, dla $p = 2$. Jako że pojęcia omawiane w tym rozdziale są szeroko znane, wszelkie dowody będą pomijane lub będą miały szkicowy charakter. W zakresie analizy funkcjonalnej odsyłamy np. do [7, 27], w zakresie teorii miary do [5, 12, 26], a ogólną charakterystykę krat zawiera np. monografia [32].

W niniejszej pracy przyjmiemy następującą konwencję oznaczeń – elementy 'abstrakcyjnych' przestrzeni Banacha i Hilberta będziemy oznaczać małymi literami łacińskimi, elementy przestrzeni L_p będziemy oznaczać małymi literami greckimi, operatory na przestrzeniach L_p z kolei oznaczamy wielkimi literami łacińskimi.

1.1 Operatory w przestrzeniach Banacha

Wszystkie przestrzenie wektorowe w niniejszej pracy będą rozpatrywane nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Przypomnijmy, że *przestrzenią unormowaną* nazywamy przestrzeń wektorową V nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wyposażoną w normę, tzn. odwzorowanie $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ spełniające następujące warunki

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0,$ (*niezdegenerowanie*)

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$ (*dodatnia jednorodność*)

(N3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$ (*nierówność trójkąta*) gdzie x, $y \in V$ i $\lambda \in \mathbb{F}$. Liczbę $\|x\|$ nazywamy *normą (długością) wektora* $x \in V$. Norma zadaje metrykę wzorem $d(x,y) := \|x-y\|$, $x,y \in V$. W szczególności, ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L$ jest zbieżny do $x \in V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Piszemy wtedy $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Przestrzenią Banacha nazywamy przestrzeń unormowaną zupełną, tzn. przestrzeń V, w której każdy ciąg Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$, to jest taki dla którego $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$, jest zbieżny, czyli istnieje $x \in V$ taki, że $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$.

Operatorem będziemy nazywać odwzorowanie liniowe $T : V \to W$ między dwoma przestrzeniami unormowanymi V i W. Normę operatora defniujemy wzorem

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Mówimy, że operator T jest *ograniczony*, jeżeli jego norma jest skończona. Operator T jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest odwzorowaniem ciągłym.

Zbiór $\mathcal{B}(V,W)$ operatorów ograniczonych między przestrzeniami Banacha V i W sam tworzy przestrzeń Banacha z normą operatorową oraz ze strukturą liniową zdefiniowaną punktowo. Jeśli $V = W$ to będziemy pisać $\mathcal{B}(V)$ w miejsce $\mathcal{B}(V,V)$. Składanie operatorów zadaje na $\mathcal{B}(V)$ mnożenie, wraz z którym przestrzeń $\mathcal{B}(V)$ tworzy algebrę Banacha. Operator identycznościowy jest jedynką tej algebry. Przestrzeń $V^* := \mathcal{B}(V,\mathbb{F})$ nazywamy *przestrzenią dualną* do V, a jej elementy $f : V \to \mathbb{F}$ nazywamy funkcjonałami (ograniczonymi). Twierdzenie Hahna-Banacha implikuje, że mamy naturalne izometryczne zanurzenie V w przestrzeń do niego podwójnie sprzężoną:

$$i : L \hookrightarrow V^{**} := (V^*)^*, \qquad i(x)(f) := f(x).$$

Przestrzeń V utożsamiamy z podprzestrzenią V^{**} za pomocą odwzorowania i zatem $V \subseteq V^{**}$. Powiemy, że V jest *przestrzenią refleksywną* jeśli $V = V^{**}$.

Zasadniczą motywacją do rozważania przestrzeni dualnej V^* jest fakt, że pozwala ona zdefiniować następującą formę dwuliniową (zwanej parowaniem)

$$V \times V^* \ni (x,f) \longmapsto \langle f,x\rangle := f(x) \in \mathbb{F},$$

która imituje iloczyn skalarny na V. Dla dowolnego operatora $T \in \mathcal{B}(V,W)$, między przestrzeniami Banacha V, W, istnieje dokładnie operator $T^* \in \mathcal{B}(W^*, V^*)$ na przestrzenach dualnych taki, że

$$\forall_{\ f\in W^*, x\in V} \qquad \langle Tx, f\rangle = \langle x, T^*f\rangle.$$

Operator ten jest dany wzorem $T^*f = f \circ T$ i nazywamy go *operatorem sprzężonym* do T.

Stwierdzenie 1.1. *Jeśli $T \in \mathcal{B}(V)$, to $T^* \in \mathcal{B}(V^*)$ oraz $\|T\| = \|T^*\|$.*

Dowód. Dla dowolnego $f \in V^*$ mamy $\|T^*(f)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(T(x))\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|f\| \cdot \|T(x)\| = \|f\| \cdot \|T\|$, skąd $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. Stosując tę nierówność do T^* w miejsce T otrzymujemy $\|T^{**}\| \leqslant \|T^*\|$, gdzie $T^{**} := (T^*)^*$. Obcięcie T^{**} do $V \subseteq V^{**}$ pokrywa się z T. Zatem $\|T\| = \|T^{**}|_V\| \leqslant \|T^{**}\| \leqslant \|T^*\|$. ■

Dla operatora $T \in \mathcal{B}(V)$ oznaczamy jego *obraz* i *jądro* jak następuje

$$\mathcal{R}(T) := \{Tx : x \in V\}, \qquad \mathcal{N}(T) := \{x \in V : Tx = 0\}.$$

Są to podprzestrzenie wektorowe V. Przy czym jądro $\mathcal{N}(T)$ jest zawsze domkniętą podprzestrzenią. Natomiast obraz na ogół domknięty być nie musi.

Definicja 1.2. Operator $P \in \mathcal{B}(V)$ jest *rzutem* lub *idempotentem*, jeśli $P^2 := PP = P$. P jest rzutem jeżeli na swoim obrazie jest identycznością.

Stwierdzenie 1.3. *Niech $P \in \mathcal{B}(V)$ będzie rzutem. Wtedy obraz $\mathcal{R}(T)$ jest domknięty oraz V rozkłada się na sumę prostą domkniętych podprzestrzeni*

$$V = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P). \tag{1.1}$$

Ponadto, $1 - P$ też jest rzutem oraz $\mathcal{N}(1-P) = \mathcal{R}(P)$ i $\mathcal{R}(1-P) = \mathcal{N}(P)$.

Dowód. Dla każdego $x \in V$ mamy

$$x \in \mathcal{R}(P) \Leftrightarrow Px = x \Leftrightarrow x - Px = 0 \Leftrightarrow (1-P)x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{N}(1-P).$$

Czyli $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(1-P)$ i w szczególności obraz P jest domknięty. Ponadto $(1-P)^2 = 1-2P+P^2 = 1-P$, zatem $1-P$ jest rzutem. Zastępując miejscami P z $(1-P)$ w poprzedniej relacji dostajemy $\mathcal{R}(1-P) = \mathcal{N}(P)$. Dla każdego $x \in V$ mamy $x = Px + (1-P)x$, gdzie $Px \in \mathcal{R}(P)$ i $(1-P)x \in \mathcal{N}(P)$. Rozkład ten jest jednoznaczny, bo $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\}$ (jeżeli $x = y + z$, gdzie $y \in \mathcal{R}(P)$ i $z \in \mathcal{N}(P)$, to $Px = y$ i $(1-P)x = z$). ■

Uwaga. Rozkład (1.1) wyznacza rzut P jednoznacznie, gdyż jeśli $x = y + z$, gdzie $y \in \mathcal{R}(P)$ i $z \in \mathcal{N}(P)$, to $Px = y$. Dlatego też mówi się, że P jest *rzutem na podprzestrzeń $\mathcal{R}(P)$ względem podprzestrzeni $\mathcal{N}(P)$*.

Jeżeli P jest niezerowym rzutem, to $\|P\| \geqslant 1$, bo $1 = \|\operatorname{id}_{\mathcal{R}(P)}\| = \|P|_{\mathcal{R}(P)}\| \leqslant \|P\|$. De facto dowolna liczba z przedziału $[1, +\infty)$ może być normą rzutu.

Przykład 1.4 (Rzuty na płaszczyźnie)**.** Niech $H = \mathbb{R}^2$ będzie płaszczyzną euklidesową. Wtedy wszystkie rzuty na oś x-sów $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ są dane przez macierze postaci

$$P_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Dla $a = 0$, P_0 jest rzutem na prostą $y = 0$ względem prostej $x = 0$ (P_0 jest rzutem ortogonalnym na M). Jeśli $a \neq 0$, to P_a jest rzutem na prostą $y = 0$

względem prostej $y = -x/a$ (tzn. rzutem na M względem podprzestrzeni $N = \{(x, -x/a) : x \in \mathbb{R}\}$). Żeby policzyć normę operatora P_a trzeba zmaksymalizować funkcję $f(x, y) = x + ay$ pod warunkiem $x^2 + y^2 = 1$. Stosując metodę mnożników Lagrange'a otrzymujemy, że funkcja f osiąga maksimum w punkcie $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}})$ i jej maksimum wynosi $\sqrt{1+a^2}$. Stąd

$$\|P_a\| = \sqrt{1+a^2}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

W szczególności $\|P_a\| \to \infty$, gdy $a \to \infty$. Zatem norma rzutu może być dowolnie duża.

Stwierdzenie 1.5. *Operator $P \in \mathcal{B}(V)$ jest rzutem wtedy i tylko wtedy, gdy operator sprzężony $P^* \in \mathcal{B}(V^*)$ jest rzutem.*

Dowód. Jeśli $P^2 = P$, to dla dowolnego $f \in V^*$ mamy

$$P^{*2} f = (P^* f) \circ P = f \circ P^2 = f \circ P = P^* f.$$

Stąd $P^{*2} = P^*$ jest rzutem. Na odwrót, jeśli P^* jest rzutem, to P^{**} jest rzutem na mocy poprzedniej części dowodu. Jako, że $P = P^{**}|_V$ jest obcięciem P^{**} do podprzestrzeni niezmienniczej $V \subseteq V^{**}$, to $P^2 = P^{**}|_V P^{**}|_V = P^{**2}|_V = P^{**}|_V = P$ i P jest rzutem. ■

1.2 Przestrzenie L_p

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie ustaloną *przestrzenią z miarą*. Oznaczmy $\mathcal{F}$ σ-algebrę podzbiorów zbioru Ω. $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ jest miarą (czyli σ-addytywną funkcją zbioru taką, że $\mu(\emptyset) = 0$). Zakładamy, że czytelnik jest zaznajomiony z teorią całki Lebesgue'a (patrz [5, 12, 16]). Ustalmy ciało skalarów $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Przypomnijmy, że funkcja $x : \Omega \to \mathbb{F}$ jest *mierzalna* jeżeli $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ dla każdego zbioru borelowskiego $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{F})$. Będziemy tu przyjmować standardową konwencję i będziemy utożsamiać funkcje mierzalne równe μ-prawie wszędzie. Zatem formalnie elementami zbioru $M(\mu)$ funkcji mierzalnych są klasy abstrakcji takich funkcji modulo relacja równoważności $\overset{\mu\text{-}p.w.}{=}$, gdzie

$$\xi \overset{\mu\text{-}p.w.}{=} y \overset{def}{\iff} \mu(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\}) = 0.$$

Ani całkowalność, ani całka z funkcji mierzalnej nie zależy od wyboru reprezentanta w $M(\mu)$. Kombinacje liniowe funkcji mierzalnych są funkcjami mierzalnymi i ta naturalna struktura liniowa faktoryzuje się przez relację $\overset{\mu\text{-}p.w.}{=}$. Zatem $M(\mu)$ jest przestrzenią wektorową ze strukturą liniową, gdzie operacje liniowo zdefiniowane są dla reprezentatów punktowo.

Definicja 1.6. Niech $p > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Powiemy, że funkcja mierzalna $\xi : \Omega \to \mathbb{F}$ jest *całkowalna w p-tej potędze*, gdy funkcja $|\xi|^p$ jest całkowalna. Zbiór takich funkcji oznaczamy $L_p(\mu)$ lub $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Nietrudno pokazać, dla dowolnego $p > 0$, że funkcje całkowalne w p-tej potędze $L_p(\mu)$ tworzą podprzestrzeń wektorową $M(\mu)$. Natomiast tylko dla $p \geqslant 1$, przestrzenie $L_p(\mu)$ wyposażone są w naturalną normę ([7], [16]).

Twierdzenie 1.7. *Dla każdego $p \geqslant 1$ przestrzeń $L_p(\mu)$ jest przestrzenią Banacha z normą*

$$\|\xi\|_p := \left(\int_\Omega |\xi|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

W niniejszej pracy skupimy się wyłącznie na przypadku, gdy $p \geqslant 1$. Nierówność trójkąta dla normy (1.7) nazywana jest *nierównością Minkowskiego* [7, 27]. W dowodzie nierówności Minkowskiego, jak i w opisie przestrzeni dualnej do $L_p(\mu)$ kluczową rolę odgrywa nierówność Höldera (patrz [7, 27]).

Twierdzenie 1.8 (Nierówność Höldera)**.** *Dla dowolnych $1 < p, q < \infty$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz dowolnych funkcji $\xi \in L_p(\mu)$ i $\eta \in L_q(\mu)$ zachodzi*

$$\|\xi \cdot \eta\|_1 \leqslant \|\xi\|_p \cdot \|\eta\|_q,$$

w szczególności, $\xi \cdot \eta \in L_1(\mu)$. W nierówności (1.8) równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|\xi|^p$ i $|\eta|^q$ są liniowo zależne (jako elementy $L_1(\mu)$)

O liczbach spełniających równanie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mówimy, że są one *sprzężone hölderowsko.*

Twierdzenie 1.9 (Przestrzeń dualna do L_p)**.** *Niech $1 < p, q < \infty$ będą sprzężone hölderowsko. Dla dowolnej przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mamy naturalny izomorfizm*

$$L_p(\mu)^* \cong L_q(\mu).$$

Dokładniej, $f \in L_p(\mu)^* \iff$ istnieje $\xi \in L_q(\mu)$ takie, że

$$f(\eta) = \int_\Omega \eta \cdot \xi \, d\mu, \qquad \eta \in L_p(\mu).$$

Ponadto wtedy ξ jest jednoznacznie wyznaczone przez f oraz $\|f\| = \|\xi\|_q$.

Przestrzeń $L_p(\mu)$ jest wyposażona w częściowy porządek zadany przez stożek *funkcji dodatnich* (nieujemnych)

$$L_p(\mu)_+ := \{\xi \in L_p(\mu) : \xi \geqslant 0 \ \mu\text{-prawie wszędzie}\}.$$

Mianowicie przyjmujemy oznaczenie

$$\xi \leqslant \eta \ \overset{def}{\iff} \ \eta - \xi \in L_p(\mu)_+ \iff \eta - \xi \geqslant 0 \ \mu\text{-prawie wszędzie}.$$

Rozważmy najpierw przypadek rzeczywisty, tzn. załóżmy chwilowo, że $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Wtedy częściowy porządek na $L_p(\mu)$ jest po prostu nierównością μ-prawie wszędzie. Ponadto para $(L_p(\mu), \leqslant)$ jest kratą. Przypomnijmy, że zbiór częściowo uporządkowany $(L, \leqslant)$ jest *kratą*, jeżeli każda para elementów $u, v \in L$ posiada kres dolny $\inf\{u, v\} = u \wedge v \in L$ i górny $\sup\{u, v\} = u \vee v \in L$. W dalszej części pracy będziemy się odwoływać do pojęcia kraty. W przypadku przestrzeni $L_p(\mu)$, dla $\xi, \eta \in L_p(\mu)$ mamy

$$\xi \vee \eta = \max\{\xi, \eta\}, \quad \xi \wedge \eta = \min\{\xi, \eta\}.$$

Są to elementy przestrzeni $L_p(\mu)$ ponieważ $|\max\{\xi, \eta\}|^p, |\min\{\xi, \eta\}|^p \leqslant |\xi|^p + |\eta|^p$ oraz $|\xi|^p + |\eta|^p \in L_1(\mu)$. W szczególności

$$|\xi| = \xi \vee (-\xi)$$

i rzeczywista przestrzeń $L_p(\mu)$ z porządkiem $\leqslant$ jest kratą Banacha.

Definicja 1.10. *Rzeczywistą kratą Banacha* nazywamy rzeczywistą przestrzeń Banacha V, która jednocześnie jest kratą z częściowym porządkiem $\leqslant$ oraz

(1) $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$,

(2) $x \geqslant 0, \alpha \geqslant 0 \Longrightarrow \alpha x \geqslant 0$,

(3) $|x| \leqslant |y| \Longrightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$,

dla dowolnych $x, y, z \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, gdzie $|x| := x \vee (-x)$.

Zespolone kraty Banacha definiuje się jako kompleksyfikacje rzeczywistych krat Banacha. Przypomnijmy, że *kompleksyfikacja rzeczywistej przestrzeni liniowej* V to zespolona przestrzeń $V_{\mathbb{C}} := V \oplus V$, której elementy zapisujemy jako $x + iy$, $x, y \in V$, a strukturę liniową definiujemy wzorami

$$(x+iy)+(u+iv) := (x+u)+i(y+v), \quad (a+ib)(x+iy) = (ax-by)+i(bx+ay),$$

gdzie $x, y, u, v \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$. Jeśli V jest rzeczywistą przestrzenią Banacha, to istnieje wiele różnych normy na $V_{\mathbb{C}}$ zgodnych z normą na V, przy których $V_{\mathbb{C}}$ jest zespoloną przestrzenią Banacha i nie ma tu jednego uniwersalnego sposóbu. Na przykład, dla dowolnego $p \geqslant 1$ można zawsze położyć $\|x+iy\| := (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}$. Jednakże jeżeli V jest rzeczywistą kratą Banacha to istnieje naturalny wzór na normę w $V_{\mathbb{C}}$ wykorzystujący częściowy porządek.

Twierdzenie 1.11. *Dla dowolnej kraty Banacha V wzór*

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}} := \| \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} x \cos\theta + y \sin\theta \| \tag{1.2}$$

gdzie supremum jest wzięte w sensie częściowego porządku na V, jest poprawnie określoną normą na $V_{\mathbb{C}}$, przy której $V_{\mathbb{C}}$ jest przestrzenią Banacha.

Definicja 1.12. *Zespoloną kratą Banacha* nazywamy kompleksyfikację $V_{\mathbb{C}}$ rzeczywistej kraty Banacha V wraz z normą zadaną wzorem (1.2).

Przykład 1.13. Zespolona przestrzeń $L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest zespoloną kratą Banacha, a dokładniej kompleksyfikacją rzeczywistej przestrzeni $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$, której norma spełnia odpowiednik (1.2). Rzeczywiście jeśli $\zeta \in L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$, to kładąc $\xi := \mathrm{Re}\zeta$ oraz $\eta := \mathrm{Im}\zeta$ mamy

$$\zeta = \xi + i\eta, \qquad \text{gdzie} \qquad \xi, \eta \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu),$$

bo $|\xi|^p, |\eta|^p \leqslant |\zeta|^p \in L_1(\mu)$. Z drugiej strony dla dowolnych $\xi, \eta \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$ kładąc $\zeta := \xi + i\eta$ mamy $\zeta \in L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$, bo $|\zeta|^p \leqslant 2^p \max\{|\xi|^p, |\eta|^p\} \in L_1(\mu)$. Zatem

$$L_p^{\mathbb{C}}(\mu) = (L_p^{\mathbb{R}}(\mu))_{\mathbb{C}}.$$

Ponadto zauważmy, że w każdym punkcie mamy $|\xi + i\eta| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ i kładąc $\alpha := \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$ oraz $\beta := \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$ mamy $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Zatem istnieje $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ takie, że $\alpha = \cos\theta_0$ oraz $\beta = \sin\theta_0$. Stąd i z wzorów trygonometrycznych

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta\in[0,2\pi)} (\xi\cos\theta + \eta\sin\theta) &= \sqrt{\xi^2+\eta^2} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \Big(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\cos\theta + \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\sin\theta\Big) \\
&= |x+iy| \sup_{\theta\in[0,2\pi)} (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) \\
&= |x+iy| \sup_{\theta\in[0,2\pi)} (\cos\theta_0\cos\theta + \sin\theta_0\sin\theta) \\
&= |x+iy| \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \cos(\theta-\theta_0) = |x+iy|.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\|\xi + i\eta\|_{\mathbb{C}} = \||\xi + i\eta|\|_p = \Big(\int_\Omega |\xi + i\eta|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = \|\xi + i\eta\|_p.$$

1.3 Przestrzenie Hilberta i rzuty ortogonalne

Przestrzenią Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy przestrzeń wektorową, nad ciałem $\mathbb{F}$ liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$, wyposażoną w odwzorowanie (*iloczyn skalarny*) $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ o następujących własnościach. Dla dowolnych wektorów x, y, z należących do przestrzeni $\mathcal{H}$ i dla dowolnych stałych α, β z ciała skalarów:

(P1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$ (*sprzężona symetria*),

(P2) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ (*liniowość w pierwszym argumencie*),

(P3) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ (*dodatnio-określoność*),

(P4) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$ (*niezdegenerowanie*).

Ponadto zakładamy, że przestrzeń ta jest przestrzenią zupełną w normie, zadanej przez iloczyn skalarny wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{1.3}$$

W szczególności każda przestrzeń Hilberta jest przestrzenią Banacha.

Uwaga. Sprzężona symetria i liniowość w pierwszym argumencie implikują, że iloczyn skalarny jest *antyliniowy w drugim argumencie*, tzn. $\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha^*\langle z, x\rangle + \beta^*\langle z, y\rangle$. Czyli iloczyn skalarny jest formą półtoraliniową.

W przestrzeni z iloczynem skalarnym zachodzi *nierówność Schwartza*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{1.4}$$

W szczególności nierówność trójkąta dla normy (1.3) łatwo wynika z nierówności (1.4). Pozostałe własności normy wynikają łatwo z własności iloczynu skalarnego. Geometryczną tożsamością wyróżniającą przestrzenie Hilberta pośród przestrzeni Banacha, jest reguła równoległoboku

Twierdzenie 1.14 (Tożsamość równoległoboku)**.** *Przestrzeń Banacha $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta, tzn. istnieje iloczyn skalarny taki, że norma w $\mathcal{H}$ zadana jest wzorem* (1.3) *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1.5}$$

dla dowolnych $x, y \in \mathcal{H}$

Uwaga. Tożsamość równoległoboku mówi, że *suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych.*

Przykład 1.15. Przestrzeń $L_p(\mu)$, $p \geqslant 1$, jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$ lub $\dim(L_p(\mu)) \leqslant 1$. Rzeczywiście, łatwo jest zauważyć, że przestrzeń $L_2(\mu)$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle x, y\rangle = \int_\Omega x(t)\overline{y(t)}\, d\mu(t).$$

Jeśli $\dim(L_p(\mu)) \leqslant 1$, to $L_p(\mu) = L_2(\mu)$. Załóżmy zatem, że $L_p(\mu)$ jest przestrzenią Hilberta oraz $\dim(L_p(\mu))\ 1$. Wtedy istnieją dwa zbiory rozłączne $A, B \in \mathcal{F}$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Podstawiając $x := \chi_A$ i $y = \chi_B$ do obu stron tożsamości równoległoboku dostajemy

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = \mu(A\cup B)^{\frac{2}{p}} + \mu(A\cup B)^{\frac{2}{p}} = 2\mu(A\cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ \mathrm{P} &= 2\left(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\right) = 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right). \end{aligned}$$

Dzieląc prawą stronę przez lewą otrzymujemy, $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A\cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A\cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A\cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A\cup B)}$ dostajemy dwie liczby takie, że $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ oraz $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 = (\lambda_1)^{\frac{2}{p}} + (\lambda_2)^{\frac{2}{p}}$. Powyższe relacje mogą zachodzić tylko wtedy, gdy $p = 2$, gdyż jeśli $p > 2$ to $\lambda_i > (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$, a jeśli $p < 2$ to $\lambda_i < (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$ dla $i = 1, 2$.

Uwaga. Można pokazać, że każda przestrzeń Hilberta jest izometrycznie izomorficzna z pewną przestrzenią $L_2(\mu)$ (gdzie za μ można wziąć miarę liczącą). Dlatego też przestrzenie $L_p(\mu)$ można traktować jako 'przechylone' przestrzenie Hilberta i takie myślenie o tych przestrzeniach jest jedną z głównych idei przyświęcających niniejszej pracy.

Ustalmy teraz przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$. Dwa elementy $x, y \in \mathcal{H}$ nazywamy *ortogonalnymi*, gdy $\langle x, y\rangle = 0$, co oznaczać będziemy $x \perp y$.

Lemat 1.16 (Twierdzenie Pitagorasa)**.** *Jeśli $x \perp y$, to $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$. Implikacja przeciwna zachodzi jeżeli iloczyn skalarny $\langle x, y\rangle$ jest rzeczywisty.*

Dowód. Dla dowolnych wektorów z półtoraliniowości iloczynu skalarnego mamy $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle+\|y\|^2$ zatem tożsamość Pitagorasa zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle = 0$. ■

Element $x \in \mathcal{H}$ jest *ortogonalny do podprzestrzeni* M, gdy jest ortogonalny do każdego z jej elementów, co oznaczać będziemy $x \perp M$. Zbiór elementów ortogonalnych do M nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym* M i oznaczamy

$$M^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0 \text{ dla każdego } y \in M\}.$$

Z ciągłości i półtoraliniowości iloczynu skalarnego wynika, że $M^{\perp} \subseteq \mathcal{H}$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową. Dwie podprzestrzenie M, N są do siebie ortogonalne, gdy dla każdej pary elementów $x \in M$, $y \in N$ zachodzi $\langle x, y\rangle = 0$, piszemy wtedy $M \perp N$. Oczywiście $M \perp M^{\perp}$.

Rzutem ortogonalnym wektora $x \in H$ na podprzestrzeń $M \subseteq H$ nazywamy wektor $y \in M$ taki, że $x - y \perp M$. Piszemy wtedy $P_M x = y$. Czyli

$$P_M x = y \quad \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall_{\ z\in M} \ \langle x-y, z\rangle = 0.$$

Rzut ortogonalny $P_M x$ jeśli istnieje jest wyznaczony jednoznacznie! Rzeczywiście, jeśli $y, y' \in M$ takie, że $\langle x - y, z\rangle = 0$ oraz $\langle x - y', z\rangle = 0$ dla każdego $z \in M$, to biorąc za $z = y - y' \in M$ oraz odejmując stronami poprzednie równości otrzymujemy $\langle y - y', y - y'\rangle = 0$, skąd $y = y'$. Istnienie już jest faktem nietrywialnym:

Twierdzenie 1.17 (O istnieniu rzutu ortogonalnego)**.** *Dla dowolnej domkniętej podprzestrzeni $M \subseteq \mathcal{H}$ przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz punktu $x \in \mathcal{H}$ istnieje rzut ortogonalny $y = P_M x$. Co więcej,*

$$\|x - y\| = \inf_{z\in M} \|x - z\| \tag{1.6}$$

i rzut ortogonalny y wektora x na M jest przez równość (1.6) *wyznaczony jednoznacznie.*

Dowód. Najpierw wykażemy istnienie wektora $y \in M$ spełniającego (1.6). Dowód ten wykorzystuje tylko wypukłość i domkniętość M. Oznaczmy $\delta := \inf_{z\in M}\|x-z\|$. Skonstruujmy ciąg $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\|x-z_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \delta$. Z wypukłości M wynika z kolei, że $\frac{1}{2}(z_n+z_m) \in M$, dla dowolnych $n, m \geqslant 1$. Wynika stąd następująca nierówność

$$\delta \leqslant \inf_{z\in M}\|x - \frac{1}{2}(z_n+z_m)\|, \qquad n,m \geqslant 1. \tag{1.7}$$

Używając reguły równoległoboku dla $(x-z_n)$ i $(x-z_m)$ otrzymujemy

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2\|x-z_n\|^2 + 2\|x-z_m\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(z_n+z_m)\|^2.$$

Korzystając ze wzoru (1.7) możemy zatem zastąpić to wyrażenie nierównością

$$\|z_n - z_m\|^2 \leqslant 2\|x-z_n\|^2 + 2\|x-z_m\|^2 - 4\delta^2.$$

Z założenia $\|x-z_n\|$ i $\|x-z_m\|$ zmierzają do δ. Stąd $\|z_n-z_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$. Zatem ciąg $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest fundamentalny, co ze względu na zupełność $\mathcal{H}$ i domkniętość M gwarantuje nam istnienie $y \in M$ spełniającego (1.6).

Niech $y \in M$ będzie dowolnym elementem spełniającym (1.6). Żeby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że $x - y \perp M$, czyli $y = P_M x$. Niech $z \in M$. Dla każdego $t \in \mathbb{F}$, $y + tz \in M$, bo M jest przestrzenią liniową. Zatem

$$\|x-y\|^2 \overset{(1.6)}{\leqslant} \|x-(y+tz)\|^2 = \|(x-y)+tz\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-y, tz\rangle + |t|^2\|z\|^2.$$

Stąd, po skróceniu przez $\|x-y\|^2$, dostajemy, że $|t|^2\|z\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-y, tz\rangle \geqslant 0$ dla każdego $t \in \mathbb{F}$. Kładąc $t = se^{i\varphi}$, gdzie $\varphi := \arg\langle x-y, z\rangle$ i $s \in \mathbb{R}$ nierówność ta przyjmuje postać

$$0 \leqslant s^2|e^{i\varphi}|^2\|z\|^2 - 2s\operatorname{Re}(e^{-i\varphi}\langle x-y, z\rangle) = s^2\|z\|^2 - 2s|\langle x-y, z\rangle|.$$

Czyli rzeczywista funkcja kwadratowa $f(s) = s^2\|z\|^2 - 2s|\langle x-y, z\rangle|$ jest nieujemna i posiada miejsce zerowe dla $s = 0$. Stąd jej wyróżnik $\Delta = 4|\langle x-y, z\rangle|^2$ musi być równy zero, czyli $\langle x-y, z\rangle = 0$, tzn. $x - y \perp z$. ∎

Definicja 1.18. Dla dowolnej domkniętej podprzestrzeni liniowej $M \subseteq \mathcal{H}$ odwzorowanie $P_M : \mathcal{H} \to M \subseteq \mathcal{H}$ nazywać będziemy *rzutem ortogonalnym* na podprzestrzeń M.

Wniosek 1.19 (Rozkład ortogonalny). *Jeżeli M jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$, to $1 = P_M + P_{M^\perp}$, gdzie 1 jest operatorem identycznościowym na $\mathcal{H}$. Innymi słowy mamy*

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp,$$

czyli $\forall_{x\in H}\ \exists!_{y\in M}\exists!_{z\in M^\perp}\ x = y + z$.

Dowód. Niech $x \in \mathcal{H}$. Połóżmy $y := P_M x$ i $z := x - y$. Wtedy $x = y + z$ oraz z definicji rzutu ortogonalnego $x - y \perp M$, tzn. $z \in M^\perp$. Skoro $x - z = y \in M$, to $x - y \perp M^\perp$ i stąd $z := P_M x$. Aby pokazać jednoznaczność tego rozkładu załóżmy, że $x = y' + z'$ dla pewnego $y' \in M$ i $z' \in M^\perp$. Wtedy $y - y' \in M$, $z - z' \in M^\perp$ oraz $y - y' = z - z'$, ale $M \cap M^\perp = \{0\}$ (bo jedynym wektorem ortogonalnym do samego siebie jest wektor zerowy). Zatem $y = y'$ i $z = z'$. ■

Stwierdzenie 1.20. *Rzut ortogonalny $\mathcal{H} \ni x \to P_M x \in M \subseteq \mathcal{H}$ na domkniętą podprzestrzeń przestrzeni Hilberta jest kontraktywnym rzutem liniowym (idempotentem).*

Dowód. Niech $x, y \in \mathcal{H}$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Chcemy wykazać, że $P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha P_M x + \beta P_M y$. Z definicji rzutu ortogonalnego $P_M(\alpha x + \beta y)$ to jedyny element w M taki, że $(\alpha x + \beta y) - P_M(\alpha x + \beta y) \perp M$. Wystarczy zatem pokazać, że wektor $\alpha P_M x + \beta P_M y$ ma te same własności. Jasne, że $\alpha P_M x + \beta P_M y \in M$ bo M przestrzeń liniowa. Korzystając z (półtora)liniowości iloczynu skalarnego, dla $z \in M$ mamy

$$\langle (\alpha x + \beta y) - (\alpha P_M x + \beta P_M y), z \rangle = \alpha \langle x - P_M x, z \rangle + \beta \langle y - P_M y, z \rangle = 0,$$

bo $x - P_M x$ oraz $y - P_M y$ są ortogonalne do M z definicji rzutu. Zatem $(\alpha x + \beta y) - (\alpha P_M x + \beta P_M y) \perp M$ i stąd $P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha P_M x + \beta P_M y$.

Aby wykazać ograniczoność operatora P_M weźmy dowolny $x \in H$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa oraz równości $1 = P_M + P_{M^\perp}$ otrzymujemy

$$\|P_M x\|^2 \leqslant \|P_M x\|^2 + \|P_{M^\perp} x\|^2 \overset{1.16}{=} \|P_M x + P_{M^\perp} x\|^2 = \|x\|^2.$$

Stąd $\|P_M\| \leqslant 1$. Jeżeli $P_M \neq 0$ to $M \neq \{0\}$ i istnieje $x \in M$ o normie 1. Skoro $P_M x = x$ to $\|P_M x\| = \|x\| = 1$, czyli $\|P_M\| \geqslant 1$. Zatem $\|P_M\| = 1$. ■

Okazuje się, że kontraktywność i idempotentność charakteryzują rzuty ortogonalne. De facto istnieje wiele warunków charakteryzujących je, w tym warunki wykorzystujące sprzężenie operatorowe. Przypomnijmy, że na mocy Twierdzenia Riesza przestrzeń dualną do przestrzeni Hilberta możemy utożsamić z wyjściową przestrzenią. Dokładniej, dla dowolnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ odwzorowanie

$$\mathcal{H} \ni y \longmapsto \langle \cdot, y \rangle \in H^*$$

jest izometrycznym izomorfizmem antyliniowym: $H \overset{anty}{\cong} H^*$. W szczególności jeśli $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ są przestrzeniami Hilberta, to operator sprzężony do $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ możemy utożsamić z operatorem $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, który jest jednoznacznie wyznaczony przez warunek

$$\forall_{\, y \in \mathcal{K}, x \in \mathcal{H}} \qquad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

Tak zdefiniowane sprzężenie operatorowe jest antyliniową i antymultiplikatywną inwolucją, tzn. zachodzą następujące własności algebraiczne

$$(\alpha T+\beta S)^*=\overline{\alpha}T^*+\overline{\beta}S^*,\quad (ST)^*=T^*S^*,\quad T^{**}=T.$$

Natomiast ważnym związkiem geometrycznym między operatorem i jego sprzężeniem jest następujący fakt.

Lemat 1.21 (Twierdzenie o rozkładzie jądro-obraz)**.** *Dla każdego operatora ograniczonego $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, zachodzi*

$$\mathcal{N}T^*=(\mathcal{R}T)^{\perp}. \tag{1.8}$$

Dowód. Niech $y\in\mathcal{H}$ spełnia $T^*y=0$. Wówczas $y\in\mathcal{N}T^*$. Wtedy dla każdego elementu x przestrzeni Hilberta mamy $\langle x,T^*y\rangle=0=\langle Tx,y\rangle$. Ponieważ $Tx\in\mathcal{R}T$, zatem z własności iloczynu skalarnego $y\in(\mathcal{R}T)^{\perp}$. Dowód inkluzji przeciwnej jest natychmiastowy. ■

Operator $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy

(1) *normalnym* jeżeli komutuje ze swoim sprzężeniem, czyli $T^*T=TT^*$,

(2) *samosprzężonym* jeżeli równa się swojemu sprzężeniu, czyli $T=T^*$,

(3) *dodatnim* jeżeli $T=S^*S$ dla pewnego $S\in B(\mathcal{H})$.

Z definicji tych wprost wynika, że każdy operator dodatni jest samosprzężony, a każdy samosprzężony jest normalny. Co więcej dla idempotentów samosprzężoność i dodatniość są równoważne. W tym kontekście ważne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.22 (Pierwiastki dodatnie z operatorów dodatnich)**.** *Dla operatora $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ następujące warunki są równoważne*

(1) T jest dodatni

(2) $\langle Tx,x\rangle\geqslant 0$ dla dowolnego $x\in\mathcal{H}$,

(3) $T=S^2$ dla pewnego dodatniego operatora $S\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ponadto, jeśli powyższe równoważne warunki zachodzą, to operator S jest wyznaczony jednoznacznie przez T. Oznaczamy go $T^{1/2}$ i nazywamy pierwiastkiem dodatnim z operatora T.

Teraz jesteśmy gotowi przedstawić charakteryzacje rzutów ortogonalnych.

Twierdzenie 1.23 (Charakteryzacje operatora rzutu ortogonalnego)**.** *Niech $P:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ liniowy idempotent, tzn. $P^2=P$, na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) P jest rzutem ortogonalnym (na swój obraz),

(2) $\mathcal{N}P = (\mathcal{R}P)^{\perp}$,

(3) $\mathcal{N}P \perp \mathcal{R}P$,

(4) $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$, dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$,

(5) P jest samosprzężony, czyli $P = P^*$,

(6) P jest normalny, czyli $PP^* = P^*P$,

(7) P jest kontrakcją, czyli $\|P\| \leqslant 1$ (dokładniej $\|P\| = 1$ jeśli $P \neq 0$).

Dowód. Implikacje (1)⇔(2)⇒(3) są jasne.

(3)⇒(4). Przypomnijmy, iż $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(1-P)$ dla każdego rzutu, patrz Stwierdzenie 1.3. Zatem z założenia dostajemy, że $PM \perp (1-P)M$. Stąd dla każdego $x \in \mathcal{H}$ mamy

$$\langle Px, x\rangle = \langle Px, x + Px - Px\rangle = \|Px\|^2 + \langle Px, x - Px\rangle = \|Px\|^2.$$

(4)⇒(5). Z założenia operator P jest dodatni, a więc samosprzężony.

(5)⇒(6). Każdy operator samosprzężony jest normalny.

(6)⇒(2). Każdy operator samosprzężony jest normalny.

Załóżmy P jest normalny. Wtedy

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle P^*Px, x\rangle = \langle PP^*x, x\rangle = \langle P^*x, P^*x\rangle = \|P^*x\|^2.$$

Stąd $\|Px\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|P^*x\| = 0$. Czyli $\mathcal{N}P = \mathcal{N}P^*$. Zatem z Lematu 1.21 otrzymujemy (2).

Wykazaliśmy, że warunki (1)–(6) są równoważne. Implikacja (1)⇒(7) wynika ze Stwierdzenia 1.20. Zatem wystarczy wykazać implikację (7)⇒(1).

(7)⇒(1). Pokażemy, że P jest rzutem ortogonalnym na $M := \mathcal{R}P = P\mathcal{H}$. Z definicji trzeba pokazać, że $x - Px \perp M$ dla każdego $x \in \mathcal{H}$. Jest to równoważne inkluzji $\mathcal{N}P \subseteq M^{\perp}$, bo $\mathcal{N}P = (1-P)\mathcal{H}$. Weźmy zatem dowolne $x \in \mathcal{N}P$ oraz $y \in M = \mathcal{R}P$. Wtedy $Px = 0$ oraz $Py = y$. Stąd dla każdego $t \in \mathbb{F}$ dostajemy

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \|Py + tPx\|^2 = \|P(y+tx)\|^2 \\ &\overset{\|P\|\leqslant 1}{\leqslant} \|y+tx\|^2 = \|y\|^2 + 2\operatorname{Re} t\langle x, y\rangle + |t|^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 1.17 implikuje to, że $\langle x, y\rangle = 0$. Rzeczywiście, kładąc $t = se^{-\mathrm{i}\varphi}$, gdzie $\varphi := \arg\langle x, y\rangle$ i $s \in \mathbb{R}$, powyższa nierówność oznacza, że rzeczywista funkcja kwadratowa $f(s) = 2s|\langle x, y\rangle| + s^2\|x\|^2 \geqslant 0$ jest nieujemna. Stąd $\langle x, y\rangle = 0$, co należało dowieść. ■

Uwaga. Przedstawiona wyżej charakteryzacja rzutu ortogonalnego (1)$\Leftrightarrow$(7) odwołuje się wyłącznie do własności idempotentności i normy operatorowej. Oba te pojęcia mają sens w ogólnych przestrzeniach Banacha. W szczególności, o rzutach kontraktywnych w przestrzeniach Banacha można myśleć jako o uogólnieniach rzutów ortogonalnych. Takie myślenie jest osią niniejszej pracy.

Rozdział 2

Izometrie częściowe w przestrzeniach Banacha

Zanim przejdziemy do właściwej części pracy polegającej na charakteryzacji izometrii częściowych w przestrzeniach L_p, przedstawimy podstawowe definicje i charakteryzacje izometrii częściowych w ogólnych przestrzeniach Banacha. Rozdział ten ma również na celu stworzenie pewnych intuicji związanych z tym pojęciem, pozwalających na umotywowanie dla dalszych kroków, które zostaną podjęte. W pierwszej części rozdziału rozpatrzymy klasyczny przypadek izometrii częściowych w przestrzeniach Hilberta, szeroko opisany w podręcznikach analizy funkcjonalnej [7, 20, 27]

2.1 Izometrie częściowe w przestrzeniach Hilberta

Rozważmy operator $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ między dwiema przestrzeniami Hilberta. Przypomnijmy, że T jest *izometrią* jeżeli zachowujące normę elementów, czyli $\|Tx\| = \|x\|$. W oczywisty sposób każda liniowa izometria jest operatorem ograniczonym o normie równej 1. Mamy następujące charakteryzacje izometrii.

Stwierdzenie 2.1 (Charakteryzacje izometrii). *Dla dowolnego operatora $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ w przestrzeniach Hilberta, następujące warunki są równoważne:*

(1) T jest izometrią,

(2) T zachowuje iloczyn skalarny,

(3) $T^*T = 1$.

Dowód. (1)$\Rightarrow$(2). Niech T będzie izometrią. Wówczas dla $x, y \in \mathcal{H}$ i $\alpha \in \mathbb{F}$ mamy $\|x + \alpha y\|^2 = \|Tx + \alpha Ty\|^2$. Z definicji iloczynu skalarnego mamy

$$\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\alpha^*\langle x, y\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2 = \|Tx\|^2 + 2\operatorname{Re}\alpha^*\langle Tx, Ty\rangle + |\alpha|^2\|Ty\|^2.$$

Korzystając z izometryczności T mamy stąd $\operatorname{Re}\alpha^*\langle x,y\rangle = \operatorname{Re}\alpha^*\langle Tx,Ty\rangle$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{F}$. Kładąc $\alpha = 1$ lub $\alpha = \mathrm{i}$ dostajemy $\langle x,y\rangle = \langle Tx,Ty\rangle$.

(2)⇒(3). Dla dowolnego $x, y \in \mathcal{H}$ mamy $\langle T^*Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$, skąd

$$\|x - T^*Tx\|^2 = \langle x,x\rangle - \langle T^*Tx, x\rangle - \langle x, T^*Tx\rangle + \langle T^*Tx, T^*Tx\rangle = 0,$$

czyli $T^*T = 1$.

(3)⇒(1). $\|Tx\|^2 = \langle Tx,Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle x,x\rangle = \|x\|^2$ ■

Zauważmy, że operator T^* sprzężony do izometrii jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy operator T jest unitarny, tzn.

$$1 = T^*T = TT^*,$$

czyli gdy T jest odwracalną izometrią (wtedy T^* jest izometrią do niej odwrotną). W przestrzeniach Hilberta nieskończonego wymiaru istnieją nieodwracalne izometrie, co oznacza, że pojęcie izometrii jest w pewnym sensie ‘niesymetryczne’. Ogólniejsze izometrie częściowe nie mają tej wady.

Definicja 2.2. Operator $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ nazwiemy *izometrią częściową* jeżeli dla każdego elementu $x \in \mathcal{N}(T)^\perp$ należącego do dopełnienia ortogonalnego jądra operatora T zachodzi

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

Podprzestrzeń $\mathcal{N}(T)^\perp \subseteq \mathcal{H}$ nazywamy *przestrzenią inicjalną* T, a podprzestrzeń $\mathcal{R}T \subseteq \mathcal{K}$ *przestrzenią finalną* izometrii częściowej T.

Twierdzenie 2.3 (Charakteryzacja izometrii częściowych)**.** *Dla dowolnego operatora $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ w przestrzeniach Hilberta, następujące warunki są równoważne*

(1) T jest izometrią częściową,

(2) T^* jest izometrią częściową,

(3) T^*T jest rzutem,

(4) TT^* jest rzutem,

(5) $TT^*T = T$,

(6) $T^*TT^* = T^*$.

Ponadto jeśli te równoważne warunki zachodzą, to T^*T jest rzutem na przestrzeń inicjalną T, a TT^* rzutem na przestrzeń finalną T.

Dowód. Dowód przeprowadzimy w trzech krokach. W kroku pierwszym wykażemy równoważność punktów *(3)–(6)*. W kroku drugimy wykażemy równoważność dwóch pierwszych punktów z pozostałymi. A w trzecim kroku omówimy pozostałą część tezy

I. *(3)* $\Rightarrow$ *(5)* Niech T^*T będzie rzutem (operatorem idempotetnym). Rozważmy następujące wyrażenie

$$\begin{aligned}(TT^*T-T)^*(TT^*T-T) &= (T^*TT^*-T^*)(TT^*T-T)\\ &= T^*TT^*TT^*T-T^*TT^*T-T^*TT^*T+T^*T\\ &= T^*T-T^*T-T^*T+T^*T=0.\end{aligned}$$

Stąd $TT^*T=T$.

(5) $\Rightarrow$ *(6)* Załóżmy, że zachodzi $TT^*T=T$. Stosując sprzężenie hermitowskie na tym wyrażeniu otrzymujemy $T^*TT^*=T^*$.

(6) $\Rightarrow$ *(4)* Załóżmy, że $T^*TT^*=T^*$. Mnożąc lewostronnie przez T otrzymujemy $TT^*TT^*=TT^*$. Następnie zauważmy, że $(TT^*)^*=TT^*$. Zatem TT^* jest operatorem samosprzężonym. Korzystając z Twierdzenia 1.23 otrzymujemy wniosek, że TT^* jest rzutem.

(4) $\Rightarrow$ *(3)* Załóżmy, że TT^* jest rzutem i rozważmy wyrażenie

$$\begin{aligned}(T^*TT^*-T^*)^*(T^*TT^*-T^*) &= (TT^*T-T)(T^*TT^*-T^*)\\ &= TT^*TT^*TT^*-TT^*TT^*-TT^*TT^*+TT^*\end{aligned}$$

Ponieważ TT^* jest rzutem oznacza to, że $T^*TT^*=T^*$. Prawostronne pomnożenie przez T dowodzi, że T^*T jest idempotentem. Z drugiej strony $(T^*T)^*=T^*T$. Zatem T^*T jest również rzutem, co kończy pierwszą część dowodu.

II. *(1)* $\Rightarrow$ *(5)* Niech T będzie izometrią częściową, $x\in\mathcal{H}$ i $y\in\mathcal{N}T$. Wówczas zachodzi

$$\langle T^*TT^*x,y\rangle=\langle TT^*x,Ty\rangle=0=\langle x,Ty\rangle=\langle T^*x,y\rangle.$$

Korzystając z (1.8) i własności dopełnienia ortogonalnego otrzymujemy, że $(\mathcal{N}T)^\perp=\overline{\mathcal{R}T^*}$. Zatem dla $y\in(\mathcal{N}T)^\perp=\overline{\mathcal{R}T^*}$ mamy

$$\langle T^*TT^*x,y\rangle=\langle TT^*x,Ty\rangle=\langle T^*x,y\rangle,$$

z faktu, że $T^*x\in\overline{\mathcal{R}T^*}$ oraz z izometryczności T na dopełnieniu ortogonalnym jądra. Ponieważ przestrzeń Hilberta da się przedstawić w postaci sumy prostej podprzestrzeni i jej dopełnienia ortogonalnego zatem zachodzi $T^*TT^*=T^*$.

(2) $\Rightarrow$ *(6)* Dowód dla implikacji, że jeżeli T^* jest izometrią częściową to zachodzi $TT^*T=T$ otrzymujemy analogicznie jak powyżej.

(4) $\Rightarrow$ *(1)* Załóżmy, że TT^* jest rzutem i $x\in(\mathcal{N}T)^\perp=\overline{\mathcal{R}T^*}$. Weźmy ciąg elementów $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ należących do $\mathcal{H}$, taki, że

$$\lim_{n\to\infty}T^*x_n=x$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \|TT^*x_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle TT^*x_n, TT^*x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle (TT^*)^2 x_n, x_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle TT^*x_n, x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T^*x_n, T^*x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \|T^*x_n\|^2 = \|x\|^2.\end{aligned}$$

Zatem T jest izometrią częściową.

(3) $\Rightarrow$ *(2)* Zakładając, że T^*T jest rzutem, dowodzimy w analogiczny sposób, że T^* jest izometrią częściową, co ostatecznie dowodzi równoważności wszystkich punktów.

III. Załóżmy, że T jest izometrią częściową. Czyli zachodzą równoważne warunki *(1)–(6)*. Zacznijmy od wykazania, że obraz $\mathcal{R}(T)$ jest domknięty. Weźmy element $x_0 \in \overline{\mathcal{R}T}$ i ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. Korzystając z udowodnionych własności mamy

$$T(T^*x_0) = \lim_{n\to\infty} TT^*(Tx_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = x_0$$

co dowodzi domkniętości obrazu izometrii częściowej. Weźmy $x \in \mathcal{R}T$ wtedy $x = Ty$ dla pewnego $y \in \mathcal{H}$. Stąd $TT^*x = TT^*Ty = Ty = x$. Czyli obraz rzutu TT^* zawiera $\mathcal{R}(T)$. Z kolei jeżeli $x \in (\mathcal{R}T)^{\perp} = \mathcal{N}T^*$ to wtedy $TT^*x = 0$. Stąd TT^* jest rzutem na $\mathcal{R}T$. Przez symetrię T^*T jest rzutem na $\mathcal{R}(T^*)$. Ale $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)$ na mocy Lematu 1.21 i domkniętości $\mathcal{R}(T^*)$. ■

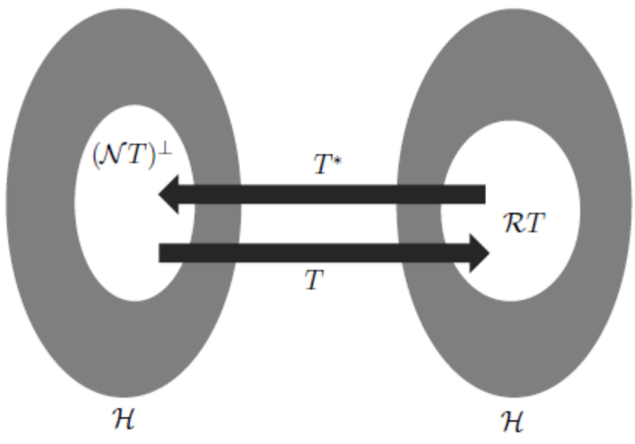
Udowodnione powyżej własności izometrii częściowych pozwalają traktować je jako przekształcenia unitarne pomiędzy dowolnymi podprzestrzeniami domkniętymi przestrzeni Hilberta (odpowiednio przestrzenią inicjalną i finalną), co w poglądowy sposób przestawia Rysunek 2.1. To z kolei umożliwia przedstawienie operatora izometrii częściowej jako złożenia dwóch operatorów rzutu $P_{S_i} : \mathcal{H} \to S_i$ na przestrzeń inicjalną i operatora unitarnego pomiędzy przestrzeniami inicjalną i finalną $U : S_i \to S_f$. Prowadzi to do obserwacji, że szczególnymi przypadkami izometrii częściowych są izometrie i rzuty. Co ważniejsze takie podejście pozwala na uogólnienie pojęcia izometrii częściowej na przestrzenie Banacha.

2.2 Izometrie częściowe w przestrzeniach Banacha

Definicję izometrii częściowej w dowolnej przestrzeni Banacha zaproponował Mbekhta w pracy [19]. Punktem wyjścia dla jego definicji jest następująca charakterystyka [19, 3.1, 3.3] izometrii częściowych w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, która wykorzystuje jedynie strukturę przestrzeni Banacha i bazuje na pojęciu odwrotności uogólnionej.

Definicja 2.4. *Odwrotnością uogólnioną* operatora $T \in \mathcal{B}(V, W)$ między przestrzeniami Bancha V, W nazywamy taki operator $S \in \mathcal{B}(W, V)$, dla którego zachodzą związki

$$TST = T, \qquad STS = S. \tag{2.1}$$



Rysunek 2.1: Schemat działania operatorów izometrii częściowej

Twierdzenie 2.5. *Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ na przestrzeniach Hilberta $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ jest izometrią częściową wtedy i tylko wtedy, gdy T jest kontrakcją oraz istnieje kontrakcja $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ będąca odwrotnością uogólnioną T.*

Ponadto, jeśli te równoważne warunki zachodzą, to $S = T^*$.

Dowód. "Konieczność". Jeśli T jest izometrią częściową to na mocy Twierdzenia 2.3 operator $S := T^*$ jest również izometrią częściową i zachodzą relacje (2.1).

"Dostateczność". Załóżmy, że T, S są kontrakcjami spełniającymi (2.1). Zauważmy najpierw, że $\|T\| = \|S\| = 1$. Rzeczywiście, $\|T\| = \|TST\| \leqslant \|T\|\|S\|$ implikuje, że $\|S\| \geqslant 1$, a zatem $\|S\| = 1$. Ten sam argument pokazuje, że $\|T\| = 1$. Niech teraz $x \in \mathcal{K}$. Wtedy $\|Sx\| = \|STSx\| \leqslant \|TSx\| \leqslant \|Sx\|$, a zatem $\|TSx\| = \|Sx\|$. Stąd

$$\langle (I - T^*T)Sx, Sx\rangle = \|Sx\|^2 - \|TSx\|^2 = 0. \tag{2.2}$$

Ponieważ T jest kontrakcją, to operator $I - T^*T$ jest dodatni (patrz Twierdzenie 1.22). Niech $(I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ będzie jego pierwiastkiem dodatnim. Na mocy (2.2) dla każdego $x \in \mathcal{H}$ dostajemy $\|(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}Sx\|^2 = \langle (I-T^*T)Sx, Sx\rangle = 0$, czyli $(I - T^*T)^{\frac{1}{2}}S = 0$. Stąd $(I - T^*T)S = 0$. Równoważnie $S = T^*TS$. Stąd i (2.1) z otrzymujemy, że

$$T = TST = T(T^*TS)T = TT^*(TST) = TT^*T,$$

co na mocy Twierdzenia 2.3 dowodzi, że T jest izometrią częściową.

Żeby wykazać, że $S = T^*$, zauważmy że przez symetrię naszych założeń S jest izometrią częściową oraz $T = S^*ST$ (w powyższym rozumowaniu możemy zamienić rolami S i T). Poza tym wykazana powyżej relacja $\|TSx\| = \|Sx\|$ dla $x \in \mathcal{H}$, oznacza, że przestrzeń finalna S jest zawarta w przestrzeni inicjalnej T. Zatem $T = TSS^*$. Stąd

$$T = S^*STSS^* = S^*SS^* = S^*,$$

co dowodzi, że $S = T^*$. ■

Definicja 2.6. Powiemy, że operator $T \in \mathcal{B}(V)$ na przestrzeni Banacha V jest *izometrią cześciową* jeżeli T jest kontrakcją oraz posiada uogólnioną odwrotność $S \in \mathcal{B}(V)$, również będącą kontrakcją. Kontrakcje T i S spełniające (2.1) będziemy nazywać wzajemnie *sprzężonymi izometriami częściowymi*. Izometrie częściowe sprzężone z izometriami będziemy nazywać *ko–izometriami*.

Uwaga. Na mocy Twierdzenia 2.5, jeśli $V = \mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta, to wprowadzone powyżej pojęcia izometrii częściowej oraz sprzężenia pokrywają się z klasycznymi terminami hilbertowskimi. Izometria częściowa na przestrzeni Banacha może być sprzężona z dwoma różnymi izometriami częściowymi (patrz Przykład 2.10). Nie każda izometria na przestrzeni Banacha jest izometrią częściową (patrz Przykład 2.9). Istnieją przestrzenie Banacha, nie będące przestrzeniami Hilberta, dla których każda izometria jest izometrią częściową. Jak pokażemy w dalszej części pracy, do takich przestrzeni należą przestrzenie typu L^p, $1 \leqslant p < \infty$.

W przestrzeniach Banacha interpretacja geometryczna izometrii częściowych, analogiczna do tej w przestrzeni Hilberta (patrz strona 28) jest możliwa. W szczególności, wyjaśnia ona niejednoznaczność sprzężenia tychże operatorów. Aby to unaocznić przytoczymy tu nieco rozszerzoną wersję [19, Proposition 4.2], a następnie zobrazujemy to twierdzenie na przykładzie.

Twierdzenie 2.7. *Niech $T \in \mathcal{B}(V, W)$ będzie operatorem działającym w przestrzeniach Banacha V, W. Następujące warunki są równoważne*

(1) T jest izometrią częściową,

(2) istnieją rzuty P i Q o normie 1 odpowiednio na obraz i dopełnienie jądra operatora T oraz T jest izometrią na obrazie Q,

(3) jądro $\mathcal{N}(T)$ ma dopełnienie, na którym T jest izometrią oraz istnieje rzut o normie 1 na obraz $\mathcal{R}(T)$ operatora T.

Ponadto, jeśli T jest izometrią częściową, to relacje $\mathcal{R}(ST) = M$, $TS = P$ ustalają bijektywną odpowiedniość między izometriami częściowymi S sprzężonymi z T oraz parami (M, P), gdzie M jest dopełnieniem jądra $\mathcal{N}(T)$, a P jest kontraktywnym rzutem na obraz $\mathcal{R}(T)$ operatora T.

Dowód. *(1)* $\Rightarrow$ *(2)*. Niech $S \in \mathcal{B}(W, V)$ będzie izometrią częściową sprzężoną z T. Połóżmy $Q := ST$ oraz $P := TS$. Zauważmy, że są to kontrakcje. Korzystając wyłącznie z definicji odwrotności uogólnionej (tzn. relacji (2.1)) otrzymujemy, że

$$Q = ST = (STS)(TST) = S(TST)ST = (ST)(ST),$$

stąd Q jest rzutem. Analogicznie rzutem jest również P. Zatem Q i P są rzutami o normie 1. Jasnym jest, że $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(TS) \subseteq \mathcal{R}(T)$. Z drugiej strony jeśli $x \in \mathcal{R}(T)$, to $x = Ty$ dla pewnego $y \in V$ i stąd $x = Ty = (TS)Ty \in \mathcal{R}(TS) = \mathcal{R}(P)$. Zatem P jest rzutem na obraz $\mathcal{R}(T)$ operatora T.

Podobnie jasne jest, że $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(ST)$. Natomiast jeśli $x \in \mathcal{N}(Q)$, to $Tx = T(ST)x = 0$. Zatem $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(T)$. Czyli Q jest rzutem na pewne dopełnienie jądra operatora T. Ponadto dla $x \in \mathcal{R}(Q)$ mamy

$$\|x\| = \|Qx\| = \|STx\| \leqslant \|Tx\| \leqslant \|x\|,$$

skąd $\|Tx\| = \|x\|$. Zatem T jest izometrią na obrazie rzutu Q.

(2) $\Rightarrow$ *(3)*. Implikacja ta jest oczywista, gdyż $M := \mathcal{R}(Q)$ jest dopełnieniem jądra $\mathcal{N}(T)$.

(3) $\Rightarrow$ *(1)*. Niech M oznacza dopełnienie jądra $\mathcal{N}(T)$, na którym T jest izometrią. Zauważmy, że istnienie takiego dopełnienia implikuje, że T jest kontrakcją. Niech P będzie kontraktywnym rzutem na obraz $\mathcal{R}(T)$. Skoro $T : M \to \mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(P)$ jest odwracalną izometrią, to możemy zdefiniować operator $S \in \mathcal{B}(W, V)$ wzorem

$$Sy := T|_M^{-1}(Py), \qquad y \in W.$$

Jest to kontrakcja (jako złożenie dwóch kontrakcji), której obraz to M. Ponadto $TS = TT|_M^{-1}P = P$ i stąd

$$TST = PT = T \text{ oraz } STS = SP = S.$$

Zatem T i S są sprzężonymi izometriami częściowymi. Ponadto

$$Q := ST = T|_M^{-1}PT = T|_M^{-1}T$$

jest kontraktywnym rzutem na M. ■

Uwaga. Bijektywna odpowiedniość między częściowymi operatorami S sprzężonymi z izometrią częściową T, a parami (M, T) opisana w Twierdzeniu 2.7, na ogół nie przenosi się na pary kontraktywnych rzutów (Q, P), gdzie $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(T)$ i $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(T)$. To znaczy dla każdej izometrii częściowej S sprzężonej z T, operatory

$$Q = ST, \qquad P = TS,$$

są rzutami o tych własnościach, ale na ogół nie każda para kontraktywnych rzutów (Q, P) takich, że $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(T)$ i $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(T)$, jest powyższej postaci (patrz Przykład 2.11).

Wniosek 2.8. *Każda odwracalna izometria $T \in \mathcal{B}(V, W)$ jest izometrią częściową oraz jedyną izometrią częściową sprzężoną z T jest izometria $T^{-1} \in \mathcal{B}(W, V)$.*

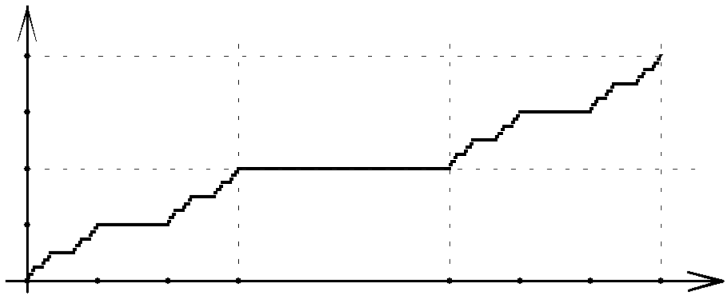
Przykład 2.9 (Izometrie nie będące izometriami częściowymi)**.** Niech $V = C(\Omega)$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych na zwartej przestrzeni metrycznej Ω z normą maksimum. Dla ustalonego odwzorowania ciągłego $\varphi : \Omega \to \Omega$ operator kompozycji

$$Tf := f \circ \varphi, \qquad f \in C(\Omega)$$

jest poprawnie określoną kontrakcją $T \in \mathcal{B}(V)$. Operator T jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest surjekcją. Załóżmy, że T jest izometrią. Na mocy Twierdzenia Ditora kontraktywny rzut na obraz $\mathcal{R}(T)$ operatora T istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy φ posiada *cięcie*, tzn. odwzorowanie $\Phi : \Omega \to \{$niepuste i domknięte podzbiory $\Omega\}$ spełniające

$$\Phi(t) \subseteq \varphi^{-1}(t) \text{ dla każdego } t \in \Omega,$$

które dodatkowo jest *półciągłe z dołu* to znaczy, że dla każdego otwartego podzbioru $A \subseteq \Omega$ zbiór $\{t \in \Omega : A \cap \Phi(t) \neq \emptyset\}$ jest otwarty w Ω.



Rysunek 2.2: Diabelskie schody Cantora

Biorąc $\Omega := [0,1]$ oraz dowolną ciągłą surjekcję $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, która jest stała na jakimś przedziale $[a,b] \subseteq [0,1]$ i kładąc $A = (a,b)$ widzimy, że żadne cięcie φ nie może być półciągłe z dołu. Zatem dla takich odwzorowań operator T jest izometrią, która nie jest cześciową izometrią. Skrajnym przypadkiem takiego odwzorowania φ są tak zwane *diabelskie schody Cantora* – wykres jest przedstawiony na Rysunku 2.2.

Przykład 2.10 (Niejednoznaczność sprzężenia izometrii częściowej)**.** Rozpatrzmy klasyczny, jednostronny operator przesunięcia $T_{\mathbb{N}}$ działający w przestrzeni $V = \ell_p(\mathbb{N})$, $p \in [1, \infty]$:

$$T(x(1), x(2), x(3)...) = (x(2), x(3), ...).$$

Oczywiście T jest izometrią częściową w sensie Definicji 2.6. Jedynym rzutem takim, że $T(V) = V$ jest operator identycznościowy oraz gdy $p < \infty$ jedynym dopełnieniem podprzestrzeni $\mathcal{N}T$, na którym operator T jest izometrią jest podprzestrzeń

$$M = \{x \in V : x(1) = 0\}.$$

Zatem, gdy $V = \ell_p(\mathbb{N})$ dla $p < \infty$ jedyną izometrią częściową sprzężoną z T jest operator prawostronnego przesunięcia

$$S(x(1), x(2), ...) = (0, x(1), x(2), ...).$$

W przypadku, gdy $V = \ell_\infty(\mathbb{N})$, sytuacja się zmienia i dopełnienia jądra T, na których T jest izometrią można poindeksować elementami kuli jednostkowej przestrzeni dualnej V^*:

$$M_f = \{x \in \ell_\infty(\mathbb{N}) : x(1) = f(x(2), x(3), ...)\}, \qquad f \in V^*,\ \|f\| \leqslant 1.$$

Zatem wszystkie izometrie częściowe sprzężone z $T : V \to V$ są postaci

$$S_f x = (f(x), x(1), x(2), ...), \qquad f \in V^*,\ \|f\| \leqslant 1.$$

Zatem jest ich tyle ile unormowanych miar Radona na uzwarceniu Čecha-Stone'a $\beta(\mathbb{N})$ przestrzeni dyskretnej $\mathbb{N}$, czyli tyle co unormowanych miar skończenie addytywnych na $\mathbb{N}$.

Przykład 2.11 (Rzut kontraktywny na dopełnienie jądra nie pochodzący od sprzężonej izometrii częściowej)**.** Wracając do oznaczeń z Przykładu 2.10 zauważmy, że w przypadku, gdy $V = \ell_1(\mathbb{N})$ to dla każdego elementu $f : \mathbb{F} \to \ell_1(\mathbb{N})$, $\|f\|_1 \leqslant 1$, wzór

$$Q_f x = STx + x(1)Sf = (0, x(2), x(3), ...) + x(1)(0, f(1), f(2), f(3), ...)$$

definiuje kontraktywny rzut na M (de facto wszystkie kontraktywne rzuty na M są tej postaci). Ale izometria S jest jedyną izometrią częściową sprzężoną z T oraz $TS = Q_0$. Natomiast każdy operator $T_f := TQ_f$ jest ko-izometrią sprzężoną z S (wszystkie izometrie częściowe sprzężone z S są tej postaci) oraz $T_f S = Q_f$.

Rozdział 3

Operator warunkowej wartości oczekiwanej

Z przytoczonych do tej pory ogólnych opisów izometrii częściowych w przestrzeniach Banacha, jasno wynika, że chcąc otrzymać charakteryzację takich operatorów w przestrzeniach L_p, potrzeba najpierw zrozumieć strukturę rzutów kontraktywnych oraz izometrii w przestrzeniach L_p. W dowodach twierdzeń opisujących rzuty kontraktywne w przestrzeniach L_p, szczególnie użyteczne jest sięgnięcie po operatorową charakteryzację warunkowej wartości oczekiwanej. Ze względu na istotną rolę tego pojęcia w zastosowaniach matematyki– szeroko omówionego m. in [5, 16], w poniższym rozdziale skupimy się wyłącznie na tym zadaniu. To znaczy omówimy podstawowe własności warunkowej wartości oczekiwanej działającej na rzeczywistej przestrzeni $L_1(\mu)$ z miarą skończoną i przedstawimy jej charakteryzację jako rzutu kontraktywnego zachowującego funkcję stałą. Dowód tego ostatniego twierdzenia oprzemy na pracy Douglasa [9]. Następnie poprzez kompleksyfikację pokażemy, że charakteryzacja ta przenosi się również na przypadek zespolony.

3.1 Warunkowa wartość oczekiwana

Zazwyczaj warunkową wartość oczekiwaną definiuje się dla zmiennych losowych na przestrzeni probabilistycznej (patrz [5, 16]), czyli dla funkcji mierzalnych na przestrzeni z miarą unormowaną do jedynki. Zarówno definicja jak i własności warunkowej wartości oczekiwanej przenoszoną się bez żadnych zmian na dowolne przestrzenie z miarą skończoną i takie będziemy tu rozpatrywać (patrz [26]).

Definicja 3.1. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną i niech $\mathcal{M}$ będzie σ-podalgebrą $\mathcal{F}$. *Warunkową wartością oczekiwaną* całkowalnej funkcji $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ względem σ-algebry $\mathcal{M}$ nazywamy całkowalną funkcję $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) : \Omega \to \mathbb{R}$ taką, że

(WWO1) $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)$ jest $\mathcal{M}$-mierzalna

(WWO2) Dla każdego zbioru A należącego do σ-algebry $\mathcal{M}$ zachodzi

$$\int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) d\mu = \int_A \xi d\mu.$$

Przykład 3.2. Jeśli σ-algebra $\mathcal{M}$ jest generowana przez przeliczalne rozbicie $\{A_n\}_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, przestrzeni Ω na zbiory o mierze niezerowej, tzn. $\Omega = \bigsqcup_{n=1}^N A_n$ oraz $\mu(A_n) > 0$ dla dowolnego n, to dla każdego $\xi \in L_1(\mu)$ wzór

$$\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} \xi \, d\mu \cdot \chi_{A_n}$$

definiuje warunkową wartość oczekiwaną ξ względem $\mathcal{M}$. Rzeczywiście, ponieważ $\{A_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathcal{M}$, to $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest funkcją $\mathcal{M}$-mierzalną wprost z definicji. Jako że $\mathcal{M}$ jest generowana przez przeliczalne rozbicie $\{A_n\}_{n=1}^N$, to każdy zbiór $A \in \mathcal{M}$ jest przeliczalną sumą $A = \bigsqcup_{i\in I} A_{n_i}$ pewnych elementów tego rozbicia i wtedy

$$\int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) d\mu = \sum_{i\in I} \int_{A_{n_i}} \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) d\mu = \sum_{i\in I} \int_{A_{n_i}} \xi \, d\mu = \int_A \xi d\mu.$$

Zatem $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)$ spełnia (WWO1) i (WWO2). W szczególności wynika stąd, że $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) \in L_1(\mu)$ jest funkcją całkowalną, gdyż

$$\int_\Omega \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)^{\pm} d\mu = \int_{\{\pm\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)>0\}} \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) d\mu = \int_{\{\pm\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)>0\}} \xi d\mu \leqslant \int_\Omega |\xi| d\mu < \infty.$$

W drugiej równości zastosowaliśmy (WWO2) do $A = \{\omega : \pm\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)(\omega) > 0\}$, które należy do $\mathcal{M}$ na mocy (WWO1).

Na ogół nie da się wypisać jawnego wzoru na warunkową wartość oczekiwaną i dlatego definiujemy ją za pomocą własności (WWO1), (WWO2).

Twierdzenie 3.3. *Warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)$ istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie μ-prawie wszędzie, dla każdej rzeczywistej funkcji całkowalnej ξ na przestrzeni z miarą skończoną $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ i każdej σ-algebry $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$.*

Dowód. "Istnienie". Istnienie warunkowej wartości oczekiwanej wynika z Twierdzenia Radona-Nikodýma. Mianowicie, funkcja $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\nu(A) = \int_A \xi \, d\mu, \qquad A \in \mathcal{M},$$

jest miarą znakową (ładunkiem), czyli funkcją σ-addytywną

$$\nu(\bigsqcup_{n=1}^\infty A_n) = \int_{\bigsqcup_{n=1}^\infty A_n} \xi \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} \xi \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n).$$

Ponadto, jeśli $\mu(A) = 0$ dla $A \in \mathcal{M}$, to $\nu(A) = 0$. Stąd miara znakowa ν jest absolutnie ciągła względem miary $\mu|_{\mathcal{M}}$ obciętej do σ-algebry $\mathcal{M}$. Zatem stosując twierdzenie Radona-Nikodýma [5] do miar ν i $\mu|_{\mathcal{M}}$ na $(\Omega, \mathcal{M})$ dostajemy wniosek, że istnieje $\mathcal{M}$-mierzalna (de facto $\mu|_{\mathcal{M}}$-całkowalna) funkcja $\frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{M}}} : \Omega \to \mathbb{R}$, zwana *pochodną Radona-Nikodýma*, taka, że

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{M}}}\, d\mu|_{\mathcal{M}} \qquad \text{dla każdego } A \in \mathcal{M}.$$

Jednakże, każda funkcja η która jest $\mu|_{\mathcal{M}}$-całkowalna, jest μ-całkowalna oraz $\int_\Omega \eta\, d\mu|_{\mathcal{M}} = \int_\Omega \eta\, d\mu$. Stąd pochodna $\frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{M}}}$ jest μ-całkowalna oraz dla $A \in \mathcal{M}$

$$\int_A \frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{M}}}\, d\mu = \int_A \frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{M}}}\, d\mu|_{\mathcal{M}} = \nu(A) = \int_A \xi\, d\mu.$$

Zatem pochodna Radona-Nikodýma $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) := \frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{M}}}$ spełnia warunki (WWO1) i (WWO2) w Definicji 3.1 i jest warunkową wartością oczekiwaną. Alternatywny dowód istnienia bazujący na metodach przestrzeni Hilberta przedstawiony jest w podręczniku [16].

"Jednoznaczność". Aby wykazać jednoznaczność warunkowej wartości oczekiwanej załóżmy, że η, $\tilde{\eta}$ są dwoma wariantami warunkowej wartości oczekiwanej ξ pod warunkiem $\mathcal{M}$. Wtedy zbiór $A := \{t : \eta(t) < \tilde{\eta}(t)\}$ należy do $\mathcal{M}$, bo obie funkcje η, $\tilde{\eta}$ są $\mathcal{M}$-mierzalne na mocy (WWO1). Zatem korzystając z (WWO2) otrzymujemy

$$\int_A \eta d\mu = \int_A \xi d\mu = \int_A \tilde{\eta} d\mu.$$

Stąd $\int_A (\tilde{\eta} - \eta) d\mu = 0$. Ale $\tilde{\eta} - \eta > 0$ na $A = \{t : \eta(t) < \tilde{\eta}(t)\}$ i całka za funkcji nieujemnej wynosi zero wtedy i tylko wtedy, gdy ta funkcja jest równa zero μ-prawie wszędzie. Stąd $\mu(A) = 0$, czyli $\eta \geqslant \tilde{\eta}$ μ-prawie wszędzie. Sytuacja jest symetryczna. Zatem zamieniając η i $\tilde{\eta}$ miejscami, otrzymujemy $\eta \geqslant \tilde{\eta}$ μ-prawie wszędzie, skąd ostatecznie $\eta = \tilde{\eta}$ μ-prawie wszędzie. ■

Uwaga. Definicja warunkowej wartości oczekiwanej ma sens dla dowolnych miar. Jednakże dla dowolnych miar nieskończonych $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)$ może nie istnieć. Istnienie warunkowej wartości oczekiwanej jest ściśle związane z zachodzeniem dla miar twierdzenia Radona-Nikodyma (patrz również [28])

Niech $L_1(\mu)$ będzie rzeczywistą przestrzenią funkcji całkowalnych na pewnej przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Dla każdej σ-algebry $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ mamy

$$L_1(\mu|_{\mathcal{M}}) = \{\xi \in L_1(\mu) : \xi \text{ jest } \mathcal{M} \text{ mierzalna}\}.$$

Zatem $L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$ związana z przestrzenią $(\Omega, \mathcal{M}, \mu|_{\mathcal{M}})$ jest podprzestrzenią przestrzeni $L_1(\mu)$. Twierdzenie 3.3 mówi, że jeżeli μ jest skończona, to warunkowa wartość oczekiwana poprawnie zadaje odwzorowanie

$$L_1(\mu) \ni \xi \longmapsto \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) \in L_1(\mu|_{\mathcal{M}}) \subseteq L_1(\mu).$$

Warunkowa wartość oczekiwana posiada wiele dobrych własności

Twierdzenie 3.4. *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną i niech $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra. Warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}^{\mathcal{M}} : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ jest liniowym rzutem na podprzestrzeń $L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$. Ponadto*

(1) $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ *jest* dodatni, *czyli* $\xi \geqslant 0 \implies \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) \geqslant 0$. *Zatem* $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ *jest* monotoniczny, *to jest* $\xi \leqslant \eta \implies \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta)$, *oraz* $|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)| \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|\xi|)$.

(2) $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ *jest* kontraktywny, *co więcej* $\|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\| = 1$.

(3) $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ *jest* wierny, *czyli* $\xi \geqslant 0$ *i* $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\xi = 0$.

(4) $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ *jest odwzorowaniem* $L_\infty(\mu|_{\mathcal{M}})$-modułowym[1] *tzn. dla dowolnej* $\mathcal{M}$-*mierzalnej funkcji istotnie ograniczonej* η *mamy*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi \cdot \eta) = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) \cdot \eta.$$

(5) $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ *zachowuje funkcję stałą (jedynkę), tzn.* $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(1) = 1$, *gdzie* $1 = \chi_\Omega$ *jest funkcją tożsamościowo równą jeden.*

DOWÓD. "Liniowość". Niech $\xi, \eta \in L_1(\mu)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że $\alpha\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) + \beta\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta)$ jest funkcją $\mathcal{M}$-mierzalną jako kombinacja liniowa funkcji $\mathcal{M}$-mierzalnych. Czyli $\alpha\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) + \beta\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta)$ spełnia (WWO1). Ponadto, dla dowolnego $A \in \mathcal{M}$ mamy

$$\begin{aligned}
\int_A \alpha\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) + \beta\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta)\, d\mu &= \alpha \int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)\, d\mu + \beta \int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta)\, d\mu \\
&= \alpha \int_A \xi\, d\mu + \beta \int_A \eta\, d\mu \\
&= \int_A \alpha\xi + \beta\eta\, d\mu.
\end{aligned}$$

Zatem $\alpha\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) + \beta\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta)$ spełnia (WWO2) dla $\alpha\xi + \beta\eta$. Stąd $\alpha\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) + \beta\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta) = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\alpha\xi + \beta\eta)$. To dowodzi liniowości $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$.

"Rzut". Jeśli $\xi \in L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$, to ξ jest $\mathcal{M}$-mierzalna, czyli spełnia (WWO1) i wtedy $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) = \xi$, bo w oczywisty sposób każda funkcja spełnia (WWO2) dla siebie samej. Zatem $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest identycznością na swoim obrazie $L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$. Zatem na mocy Definicji 1.2 jest rzutem na $L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$.

(1) Jeśli $\xi \geqslant 0$, to dla każdego $A \in \mathcal{M}$ całka $\int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)\, d\mu = \int_A \xi\, d\mu \geqslant 0$ jest nieujemna. $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)$ jest $\mathcal{M}$-mierzalna, więc wynika stąd, że $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)$ jest nieujemna μ-prawie wszędzie i $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) \geqslant 0$ w $L_1(\mu)$. Zatem $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest dodatni. Z dodatniości wynika monotoniczność $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$. Rzeczywiście, $\xi \leqslant \eta$ oznacza, że $\eta - \xi \geqslant 0$, a stąd $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta - \xi) \geqslant 0$, co modulo liniowość oznacza, że $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta)$. Z monotoniczności $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ oraz relacji $-|\xi| \leqslant \xi \leqslant |\xi|$ otrzymujemy $-\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|\xi|) \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|\xi|)$, co oznacza, że $|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)| \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|\xi|)$.

[1] $L_\infty(\mu|_{\mathcal{M}})$, wraz z mnożeniem zadanym punktowo jest pierścieniem (de facto algebrą) i mnożenie przez elementy $L_\infty(\mu|_{\mathcal{M}})$ zadaje strukturę modułu na $L_1(\mu)$ i na $L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$

(2) Korzystając nierówności $|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)| \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|\xi|)$, monotoniczności całki oraz stąd, że $\Omega \in \mathcal{M}$ mamy

$$\|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi\|_1 = \int_\Omega \left|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi\right| d\mu \leqslant \int_\Omega \mathbb{E}^{\mathcal{M}}|\xi| d\mu \overset{(WWO2)}{=} \int_\Omega |\xi| d\mu = \|\xi\|_1.$$

Zatem $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest kontrakcją, czyli $\|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\| \leqslant 1$. Jako, że $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest niezerowym rzutem, to $\|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\| \geqslant 1$. Ostatecznie $\|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\| = 1$.

(3) "Dostateczność". Niech $\xi = 0$. Zauważmy, że funkcja tożsamościowo równa 0, spełnia warunki (WWO1) i (WWO2).

"Konieczność". Niech $\xi \geqslant 0$ i $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi = 0$. Wtedy $\int_\Omega \xi d\mu = \int_\Omega \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) d\mu = 0$, skąd $\xi = 0$.

(4) Zauważmy, że obie strony równości $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi\eta) = \eta\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)$ spełniają (WWO1) – ponieważ η jest $\mathcal{M}$-mierzalna. Następnie wykażemy spełnianie warunku (WWO2). Niech $\eta = \chi_A$ i $B \in \mathcal{M}$. Wówczas

$$\int_B \chi_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi d\mu = \int_{B\cap A} \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi d\mu = \int_{B\cap A} \xi d\mu = \int_B \chi_A \xi d\mu.$$

Jeżeli η jest funkcją prostą to równość jest spełniona, ze względu na liniowość warunkowej wartości oczekiwanej. Następnie, niech η będzie nieujemną zmienną losową, wówczas będzie istniał niemalejący ciąg $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ zbieżny do η prawie na pewno. Rozbijmy $\xi = \xi^+ - \xi^-$ i zastosujmy poprzedni wynik do ζ_n i ξ^+ mamy

$$\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\zeta_n\xi^+) = \zeta_n\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi^+.$$

Zatem korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej [12] mamy $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta\xi^+) = \eta\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi^+$. Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla ξ^-, co z liniowości warunkowej wartości oczekiwanej dowodzi własności dla funkcji nieujemnej. Stosując metodę standardowej komplikacji możemy pokazać, że własność jest spełniona dla $\eta = \eta^+ - \eta^-$ co kończy dowód.

(5) Funkcja stała $1 = \chi_\Omega$ jest mierzalna względem każdej σ-algebry i jako że rozpatrywana miara jest skończona, to funkcja ta jest też całkowalna. Zatem $1 \in L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$ należy do obrazu $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$. Stąd $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(1) = 1$. ■

3.2 Warunkowa wartość oczekiwana jako rzut kontraktywny.

Celem niniejszego podrozdziału jest dowód następującej charakteryzacji warunkowych wartości oczekiwanych pochodzącej z pracy Douglasa [9].

Twierdzenie 3.5 (Douglas, 1965)**.** *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną. Operator $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ jest operatorem warunkowej wartości oczekiwanej pod warunkiem pewnej σ-algebry $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy E kontraktywnym rzutem zachowującym* 1.

Na mocy Twierdzenia 3.4 każda warunkowa wartość oczekiwana jest kontraktywnym rzutem zachowującym 1. Trudność polega na pokazaniu implikacji przeciwnej. W tym celu ustalmy przestrzeń $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ z miarą skończoną. Wykażemy najpierw trzy niezależne Lematy eksploatujące strukturę kraty Banacha na rzeczywistej przestrzeni $L_1(\mu)$.

Lemat 3.6. *Dla dowolnej σ-algebry $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ przestrzeń $\mathfrak{M} = L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$ jest podkratą Banacha przestrzeni $L_1(\mu)$ zawierającą funkcję stałą. Ponadto, każda podkrata Banacha $\mathfrak{M} \subseteq L_1(\mu)$ zawierająca 1 jest tej postaci.*

Dowód. Pierwsza część tezy jest jasna – struktura kraty Banacha na przestrzeni $L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$ pokrywa się z tą odziedziczoną z $L_1(\mu)$. W szczególności funkcja tożsamościowo równa 1 jest $\mathcal{M}$-mierzalna i całkowalna, więc $1 \in L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$.

Załóżmy zatem, że $\mathfrak{M} \subseteq L_1(\mu)$ jest dowolną domkniętą podkratą zawierającą 1. Wykażemy, że odpowiednią σ-algebrę można zdefiniować wzorem

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{F} : \chi_A \in \mathfrak{M}\}.$$

Z założenia, że $1 = \chi_\Omega \in \mathfrak{M}$ mamy $\Omega \in \mathcal{M}$. Jeśli $A \in \mathcal{M}$, czyli $\chi_A \in \mathfrak{M}$, to $\chi_{A'} = \chi_{\Omega \setminus A} = \chi_\Omega - \chi_A \in \mathfrak{M}$, bo $\mathfrak{M}$ jest przestrzenią wektorową, a stąd $A' \in \mathcal{M}$. Jeśli $A, B \in \mathcal{M}$, czyli $\chi_A, \chi_B \in \mathfrak{M}$, to $\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B \in \mathfrak{M}$, bo $\mathfrak{M}$ jest podkratą (czyli jest zamknięta na operacje $\wedge$, $\vee$). Zatem pokazaliśmy, że $\mathcal{M}$ jest algebrą zbiorów. W szczególności, $\mathcal{M}$ jest zamknięta na różnice i skończone sumy zbiorów (bo $A \setminus B = A \cap B'$ oraz $A \cup B = (A' \cap B')'$). Żeby pokazać, że $\mathcal{M}$ jest σ-algebra weźmy dowolny ciąg zbiorów $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{M}$. Jako że $\mathcal{M}$ jest algebrą zbiorów, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}$, skąd $\chi_{\bigcup_{k=1}^n A_k} \in \mathfrak{M}$. Ciąg funkcji $\chi_{\bigcup_{k=1}^n A_k}$ zbiega monotonicznie do $\chi_{\bigcup_{k=1}^\infty A_k}$. Zatem z twierdzenia o zbieżności monotonicznej $\lim_{n\to\infty} \chi_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \chi_{\bigcup_{k=1}^\infty A_k}$ w $L_1(\mu)$. Stąd i z założenia o domkniętości $\mathfrak{M}$ mamy $\chi_{\bigcup_{k=1}^\infty A_k} \in \mathfrak{M}$, czyli $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{M}$. Zatem $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{F} : \chi_A \in \mathfrak{M}\}$ jest σ-algebrą.

Zauważmy, że przestrzeń $L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$ jest generowana (jako domknięta podprzestrzeń $L_1(\mu)$) przez funkcje proste χ_A, $A \in \mathcal{M}$. Stąd $L_1(\mu|_{\mathcal{M}}) \subseteq \mathfrak{M}$. Aby udowodnić inkluzję przeciwną należy pokazać, że każda funkcja $\xi \in \mathfrak{M}$ jest $\mathcal{M}$-mierzalna. Wystarczy w tym celu wykazać, że $\mathcal{M}$-mierzalne są funkcje nieujemne, gdyż dla $\xi \in \mathfrak{M}$ mamy $\xi = \xi^+ - \xi^-$ oraz $\xi^+ = \xi \vee 0 \in \mathfrak{M}$ i $\xi^- = \xi \wedge 0 \in \mathfrak{M}$. Weźmy nieujemną funkcję $\xi \in \mathfrak{M}$. Funkcja ξ jest $\mathcal{M}$-mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej stałej rzeczywistej λ zbiór $\{t \in \Omega : \xi(t) > \lambda\}$ należy do σ-algebry $\mathcal{M}$. By to wykazać rozważmy następujący ciąg funkcji

$$\eta_n := [n(\xi - \lambda 1)^+] \wedge 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{M}$ – ciąg ten jest ograniczony przez 1 oraz punktowo zbiega do $\chi_{\{t\in\Omega:\xi>\lambda\}}$. Zatem z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej i z założenia o domkniętości $\mathfrak{M}$, mamy

$$\eta_n \xrightarrow{L_1} \chi_{\{t\in\Omega:\xi>\lambda\}} \in \mathfrak{M}.$$

Stąd $\xi \in \mathfrak{M}$ jest $\mathcal{M}$-mierzalna. Zatem $\mathfrak{M} = L_1(\mu|_{\mathcal{M}})$. ■

Lemat 3.7. *Jeżeli $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ jest dodatnim rzutem kontraktywnym, to jego obraz $\mathfrak{M} = \mathcal{R}(E)$ jest podkratą Banacha przestrzeni $L_1(\mu)$.*

DOWÓD. Obraz każdego rzutu jest domkniętą podprzestrzenią wektorową (patrz Lemat 1.3). Zatem musimy pokazać, że $\mathfrak{M}$ jest podkratą $L_1(\mu)$ – zamkniętą ze względu na operacje $\vee$ i $\wedge$. Zauważmy, że operacje te można zapisać za pomocą kombinacji liniowych oraz modułu funkcji jak następuje

$$\xi \vee \eta = \frac{\xi + \eta + |\xi - \eta|}{2}, \qquad \xi \wedge \eta = \frac{\xi + \eta - |\xi - \eta|}{2}.$$

Ponadto moduł wyraża się przez kombinacje liniowe oraz operację brania części nieujemnej funkcji $|\xi| = \xi^+ + \xi^- = \xi^+ + (-\xi)^+$. Zatem żeby wykazać, że przestrzeń wektorowa $\mathfrak{M}$ jest podkratą wystarczy udowodnić implikację $\xi \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \xi^+ \in \mathfrak{M}$. Niech $\xi \in \mathfrak{M}$. Korzystając z dodatniości rzutu E mamy $E(\xi^+) \geqslant 0$ oraz $E(\xi^+) \geqslant E(\xi) = \xi$ (bo $\xi^+ \geqslant \xi$). Stąd $E(\xi^+) \geqslant \xi \vee 0 = \xi^+$. Korzystając z tej nierówności oraz kontraktywności E dostajemy

$$\begin{aligned} \|E(\xi^+) - \xi^+\|_1 &= \int_\Omega E(\xi^+) - \xi^+ d\mu = \int_\Omega E(\xi^+) d\mu - \int_\Omega \xi^+ d\mu \\ &= \|E(\xi^+)\|_1 - \|\xi^+\|_1 \leqslant \|\xi^+\|_1 - \|\xi^+\|_1 = 0. \end{aligned}$$

Stąd $\xi^+ = \mathbb{E}(\xi^+)$ i $\xi^+ \in \mathfrak{M}$. ■

Lemat 3.8. *Każdy kontraktywny operator $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ zachowujący 1, jest operatorem dodatnim, tzn. dla dowolnego $\xi \geqslant 0$ zachodzi $E(\xi) \geqslant 0$.*

DOWÓD. Niech ξ będzie funkcją całkowalną, taką że $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Wtedy korzystając z własności normy i założeń o E mamy

$$\begin{aligned} \|1\|_1 - \|\xi\|_1 &= \|1 - \xi\|_1 \geqslant \|E(1) - E(\xi)\|_1 = \|1 - E(\xi)\|_1 \\ &\geqslant \|1\|_1 - \|E(\xi)\|_1 \geqslant \|1\|_1 - \|\xi\|_1. \end{aligned}$$

Zatem powyżej zachodzą równości – w szczególności $\|1\|_1 - \|E(\xi)\|_1 = \|1 - E(\xi)\|_1$. Stąd wynika, że $0 \leqslant E(\xi) \leqslant 1$. Rzeczywiście, równanie liczbowe $1 - |x| = |1 - x|$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \leqslant x \leqslant 1$, i fakt ten przenosi się na funkcje.

Jeśli ξ jest istotnie ograniczoną funkcją nieujemną, to stosując pierwszy krok do $0 \leqslant \xi/\|\xi\|_\infty \leqslant 1$ dostajemy, że $E(\xi) \geqslant 0$. Dla dowolnej całkowalnej funkcji nieujemnej ξ konstruujemy ciąg $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ nieujemnych funkcji ograniczonych, postaci $\xi_n = \xi \wedge n = \min\{\xi, n\}$. W szczególności $\xi_n \uparrow \xi$. Zatem korzystając z twierdzenia o zbieżności monotonicznej mamy

$$E(\xi) = E(\lim_{n\to\infty} \xi_n) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n) \geqslant 0.$$

Czyli E jest operatorem dodatnim. ■

DOWÓD TWIERDZENIA 3.5. W świetle Twierdzenia 3.4 do wykazania pozostało, że kontraktywny rzut $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ jest operatorem warunkowej wartości oczekiwanej pod warunkiem pewnej σ-algebry $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$.

Ponieważ operator warunkowej wartości oczekiwanej jest kontraktywny i zachowuje 1, zatem zgodnie z Lematu 3.8 jest operatorem dodatnim, a ponieważ jest również idempotenty, więc na mocy Lematu (3.7), jego obraz jest domkniętą podprzestrzenią $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ i posiada strukturę kraty. Stąd spełnione zostają założenia Lematu 3.6 i $\mathcal{R}(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}) = \mathfrak{M} = L_1(\Omega, \mathcal{M}, \mu|_{\mathcal{M}})$. Następnie wykażemy, że $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest warunkową wartością oczekiwaną względem σ-ciała $\mathcal{M}$.

(1) Zauważmy, że ponieważ z Lematu 3.7 $\mathfrak{M}$ jest rodziną funkcji $\mathcal{M}$-mierzalnych i $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi \in \mathfrak{M}$, zatem $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi$ jest $\mathcal{M}$-mierzalne.

(2) W kolejny kroku należy wykazać, że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{M}$ zachodzi

$$\int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi d\mu = \int_A \xi d\mu.$$

Operator $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest ciągły i liniowy, zatem wystarczy wykazać, że

$$\int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_B d\mu = \int_A \chi_B d\mu = \mu(A \cap B) = \int_\Omega \chi_{A\cap B} d\mu,$$

gdzie B jest dowolnym zbiorem z σ-ciała $\mathcal{F}$. Ponieważ $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest idempotenty i dodatni, zatem $\chi_A = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_A \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_{A\cap B}$ oraz $\chi_{A'} = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_{A'} \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_{A'\cap B}$. Stąd

$$\int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_B d\mu = \int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_{A\cap B} d\mu + \int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_{A'\cap B} d\mu = \int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_{A\cap B} d\mu.$$

Ponieważ $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest kontrakcją zatem

$$\int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_{A\cap B} d\mu \leqslant \|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_{A\cap B}\|_1 \leqslant \|\chi_{A\cap B}\|_1 = \int_\Omega \chi_{A\cap B} d\mu = \int_A \chi_B d\mu,$$

co możemy zapisać zwięźle

$$\int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_B d\mu \leqslant \int_A \chi_B d\mu. \tag{3.1}$$

Z drugiej strony korzystając dwukrotnie z nierówności 3.1 mamy

$$\int_A 1 d\mu = \int_A \chi_B d\mu + \int_A \chi_{B'} d\mu \geqslant \int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_B d\mu + \int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_{B'} d\mu.$$

Korzystając z liniowości operatora i założenia o zachowywaniu przezeń funkcji charakterystycznej Ω mamy

$$\int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\chi_B + \chi_{B'}) d\mu = \int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(1) d\mu = \int_A 1 d\mu$$

Stąd wynika, że dla każdego $B \in \mathcal{F}$ i każdego $A \in \mathcal{M}$ zachodzi

$$\int_A \chi_B d\mu = \int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\chi_B d\mu.$$

Co kończy dowód z uwagi na fakt, że funkcje proste stanowią gęstą podprzestrzeń przestrzeni $L_1(\mu)$. ■

3.3 Przypadek zespolony - kompleksyfikacja

Powyżej scharakteryzowaliśmy rzeczywistą warunkową wartość oczekiwaną jako rzut kontraktywny zachowujący 1. Z punktu widzenia potencjalnych zastosowań, na przykład w teorii spektralnej, istotne jest by rozważyć zespolony odpowiednik tego wyniku. W tym podrozdziale sformuujemy i udowodnimy zespolone twierdzenie Douglasa. Jego dowód bazować będzie na kompleksyfikacji przypadku rzeczywistego.

Ustalmy przestrzeń z miarą skończoną $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ i przypomnijmy, że zespolona przestrzeń $L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest kompleksyfikacją rzeczywistej przestrzeni $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$ (patrz Przykład 1.13). W szczególności $\zeta \in L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\zeta = \xi + i\eta$, gdzie $\xi, \eta \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$. Zauważmy najpierw, że $\mathbb{R}$-liniowe operatory na $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$ kompleksyfikują się do $\mathbb{C}$-liniowych operatorów na $L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$.

Stwierdzenie 3.9. *Jeżeli operator $T : L_p^{\mathbb{R}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$ jest $\mathbb{R}$-liniowy to jego kompleksyfikacja $T_{\mathbb{C}}(\xi + \mathrm{i}\eta) = T\xi + \mathrm{i}T\eta$, gdzie ξ, η dowolne funkcje z $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$, jest operatorem $\mathbb{C}$-liniowym $T_{\mathbb{C}} : L_p^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$. Ponadto $\|T_{\mathbb{C}}\| \leqslant 2\|T\|$.*

Dowód. Sprawdzenie $\mathbb{C}$-liniowości operatora $T_{\mathbb{C}} : L_p^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest prostym ćwiczeniem i dlatego je tu pomijamy. Co do szacowania normy, niech $\xi, \eta \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|T_{\mathbb{C}}(\xi + \mathrm{i}\eta)\|_p &= \|T\xi + \mathrm{i}T\eta\|_p \leqslant \|T\xi\|_p + \|T\eta\|_p \leqslant \|T\|\|\xi\|_p + \|T\|\|\eta\|_p \\ &\leqslant \|T\|\|\xi + \mathrm{i}\eta\|_p + \|T\|\|\xi + \mathrm{i}\eta\|_p = 2\|T\|\|\xi + \mathrm{i}\eta\|_p.\end{aligned}$$

Czyli $\|T_{\mathbb{C}}\| \leqslant 2\|T\|$. ∎

Uwaga 3.10. Powyższe oszacowanie na normę zostało tutaj podane ze względu prostotę dowodu. Można jednak pokazać, że zawsze mamy równość $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$, patrz [13, Theorem 3.1]. W szczególności mamy naturalne izometryczne zanurzenie

$$B(L_p^{\mathbb{R}}(\mu)) \hookrightarrow B(L_p^{\mathbb{C}}(\mu)).$$

Pokażemy, że obraz tego zanurzenia składa się z operatorów zdefiniowanych następująco.

Definicja 3.11. Operator $T : L_p^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ nazywamy *rzeczywistym* jeżeli $T(L_p^{\mathbb{R}}(\mu)) \subseteq L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$, to jest gdy T przekształca funkcje rzeczywiste na funkcje rzeczywiste. Powiemy, że T jest *dodatni*, jeżeli zachowuje stożek funkcji nieujemnych $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)_+$, czyli T przekształca funkcje nieujemne na nieujemne.

Stwierdzenie 3.12. *Dla operatora $T : L_p^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ następujące warunki są równoważne*

(1) T jest rzeczywisty,

(2) T zachowuje sprzężenie, tzn. $T\overline{\zeta} = \overline{T\zeta}$ dla dowolnej funkcji $\zeta \in L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$,

(3) T jest kompleksyfikacją $\mathbb{R}$-liniowego operatora $T_{\mathbb{R}} : L_p^{\mathbb{R}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$.

Operator $T_{\mathbb{R}}$ w (3) jest obcięciem operatora T do przestrzeni $L_p^{\mathbb{R}}(\mu) \subseteq L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$.

Dowód. (1)$\Rightarrow$(2). Niech $\zeta = \xi + i\eta$, gdzie $\xi, \eta \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$. Wtedy, $T(\xi), T(\eta) \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$, skąd

$$T(\overline{\zeta}) = T(\xi - i\eta) = T(\xi) - iT(\eta) = \overline{T(\xi) + iT(\eta)} = \overline{T(\zeta)}.$$

(2)$\Rightarrow$(1). Dla $\xi \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$ mamy $\overline{\xi} = \xi$. Zatem na mocy założenia $T(\xi) = T(\overline{\xi}) = \overline{T(\xi)}$, co jest możliwe jedynie, gdy $T(\xi) \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$.

Implikacja (3)$\Rightarrow$(1) jest oczywista. Na odwrót, zakładając (1) otrzymujemy, że obcięcie $T_{\mathbb{R}} := T|_{L_p^{\mathbb{R}}(\mu)}$ operatora T do $L_p^{\mathbb{R}}(\mu) \subseteq L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest $\mathbb{R}$-liniowym operatorem na $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$. Dla $\xi, \eta \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$ mamy

$$T(\xi + i\eta) = T(\xi) + iT(\eta) = T_{\mathbb{R}}(\xi) + iT_{\mathbb{R}}(\eta) = T_{\mathbb{C}}(\xi + i\eta),$$

czyli T jest kompleksyfikacją $T_{\mathbb{R}}$. ∎

Lemat 3.13. *Każdy operator dodatni jest rzeczywisty.*

Dowód. Jeśli $T : L_p^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest dodatni oraz $\xi \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu) \subseteq L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$, to $\xi = \xi^+ - \xi^-$, gdzie $\xi^+, \xi^- \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)_+$, i w szczególności $T(\xi^+), T(\xi^-) \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)_+ \subseteq L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$. Stąd $T(\xi) = T(\xi^+) - T(\xi^-) \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$. ∎

Definicja 3.14. *Zespoloną warunkową wartość oczekiwaną* dla funkcji $\zeta \in L_1^{\mathbb{C}}(\mu)$ definiujemy jako funkcję $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{M}}\zeta \in L_1^{\mathbb{C}}(\mu)$, która jest $\mathcal{M}$-mierzalna i spełnia warunek

$$\int_A \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{M}}\zeta d\mu = \int_A \zeta d\mu$$

dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{M}$.

Stwierdzenie 3.15. *Zespolona warunkowa wartość oczekiwana względem σ-ciała $\mathcal{M}$ zawsze istnieje i jest kompleksyfikacją rzeczywistej warunkowej wartości oczekiwanej względem $\mathcal{M}$ (w szczególności jest wyznaczona jednoznacznie).*

Dowód. Funkcję $\zeta \in L_1^{\mathbb{C}}(\mu)$ można przedstawić w postaci $\xi + \mathrm{i}\eta$ gdzie $\xi, \eta \in L_1^{\mathbb{R}}(\mu)$. Weźmy rzeczywistą warunkową wartość oczekiwaną względem $\mathcal{M}$ i zdefiniujmy $E(\zeta) := \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\xi + \mathrm{i}\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\eta$. Funkcja $E(\zeta)$ jest $\mathcal{M}$-mierzalna jako liniowa kombinacja funkcji $\mathcal{M}$-mierzalnych. Ponadto, dla dowolnego $A \in \mathcal{M}$

$$\int_A E(\zeta) d\mu = \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}(\xi) + \mathrm{i}\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}(\eta) d\mu = \int_A \xi + \mathrm{i}\eta \, d\mu = \int_A \zeta d\mu.$$

Zatem $E(\zeta)$ jest warunkową wartością oczekiwaną i $E = (\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}})_{\mathbb{C}}$ jest kompleksyfikacją $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}$. Zauważmy, że z definicji zespolonej warunkowej wartości oczekiwanej wynika, że musi ona być operatorem dodatnim, a w szczególności musi być kompleksyfikacją pewnego rzeczywistego operatora $E|_{L_p^{\mathbb{R}}(\mu)} : L_p^{\mathbb{R}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$. Jak łatwo zauważyć $E|_{L_p^{\mathbb{R}}(\mu)} = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}$ musi być rzeczywistą warunkową wartością oczekiwaną. Stąd jednoznaczność E. ∎

Twierdzenie 3.16 (Zespolone twierdzenie Douglasa)**.** *Operator $E : L_p^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest operatorem warunkowej wartości oczekiwanej wtedy i tylko wtedy gdy, E jest zachowującym 1 operatorem idempotentnym oraz $\|E\| = 1$.*

Dowód. "Konieczność". Niech E będzie zespolonym operatorem warunkowej wartości oczekiwanej. Na mocy Stwierdzenia 3.15, E jest kompleksyfikacją rzeczywistej warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}$. W szczególności, E zachowuje jedynkę: $E(1) = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}(1) = 1$. Korzystając z faktu, że $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}$ jest idempotentem mamy

$$E^2\zeta = E(\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\xi + \mathrm{i}\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\eta) = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\xi + \mathrm{i}\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\eta = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\xi + \mathrm{i}\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\eta = E\zeta.$$

W świetle Uwagi 3.10 mamy $\|E\| = \|\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{M}}\| = 1$.

"Dostateczność". Niech $E : L_p^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ będzie kontraktywnym rzutem zachowującym 1. Dowód Lematu 3.8 jest poprawny dla operatorów na przestrzeniach zespolonych. Zatem z tego lematu wynika, że E jest dodatni, a więc jest kompleksyfikacją swojego obcięcia $E_{\mathbb{R}} := E|_{L_p^{\mathbb{C}}(\mu)}$ do przestrzeni rzeczywistej $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$, patrz Lemat 3.13 oraz Stwierdzenie 3.12. Rzeczywisty operator $E_{\mathbb{R}}$ w oczywisty spowsób dziedziczy własności E, tzn. jest kontraktywnym rzutem zachowującym 1. Stosując rzeczywiste Twierdzenie Douglasa (Twierdzenie 3.5) do $E_{\mathbb{R}}$ wyciągamy wniosek, że $E_{\mathbb{R}}$ jest rzeczywistą warunkową wartością oczekiwaną. Stąd na mocy Stwierdzenia 3.15 E jest zespoloną warunkową wartością oczekiwaną. ∎

Rozdział 4

Rzuty kontraktywne w przestrzeniach L_p

W niniejszym rozdziale uogólnimy charakteryzacje rzutów kontraktywnych z rodziału poprzedniego i przedstawimy charakteryzację rzutów kontraktywnych w przestrzeniach L_p dla $p \geqslant 1$. Taka charakteryzacja przedstawiona została w pracy [1]. Do przeprowadzenia dowodu potrzebne będzie użycie nierówności Jensena, pozwalającej ograniczyć od dołu warunkową wartość oczekiwaną funkcji, poddanej odwzorowaniu wypukłemu.

4.1 Warunkowe wartości oczekiwane w przestrzeniach L_p

W tym podrozdziale $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie ustaloną przestrzenią z miarą skończoną. W szczególności, dla każdego $p \geqslant 1$ przestrzeń $L_p(\mu) \subseteq L_1(\mu)$ jest podprzestrzenią wektorową $L_1(\mu)$, de facto podprzestrzenią gęstą w topologii na $L_1(\mu)$. Pokażemy tutaj, że każda warunkowa wartość oczekiwana na $L_1(\mu)$ zachowuje każdą podprzestrzeń $L_p(\mu)$, a ponadto obcięcie warunkowej wartości oczekiwanej do przestrzeni $L_p(\mu)$ pozostaje operatorem kontraktywnym w p-tej normie.

W tym celu najpierw wykażemy kluczową tutaj nierówność Jensena.

Definicja 4.1. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłym*, gdy dla dowolnej stałej $\lambda \in (0, 1)$ oraz dla dowolnej pary argumentów $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$ zachodzi nierówność

$$\varphi\left[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\right] \leqslant \lambda\varphi(x_1) + (1 - \lambda)\varphi(x_2).$$

Powiemy, że φ jest *ściśle wypukła*, jeżeli powyższa nierówność jest ostra, dla różnych x_1, x_2.

Lemat 4.2. *Niech $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wówczas istnieje ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji afinicznych taki, że dla każdego $x \in \mathbb{F}$ zachodzi $\varphi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.*

SZKIC DOWODU. Wypukłość funkcji oznacza, że styczna w każdym punkcie jej wykresu znajduje się pod wykresem. Zatem dla każdej pary $(\alpha, \varphi(\alpha))$ istnieje funkcja afiniczna $f_\alpha(x) = a_\alpha x + b_\alpha$ taka, że

(i) $\varphi(\alpha) = f_\alpha(\alpha)$

(ii) $\varphi(x) \geqslant f_\alpha(x)$, dla każdego $x \in \mathbb{F}$.

Z warunków (i), (ii) otrzymujemy, że $\sup_{\alpha\in\mathbb{F}}\{f_\alpha(x)\} = \varphi(x)$. Z faktu gęstości zbioru liczb wymiernych w $\mathbb{R}$, możemy wybrać ciąg $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_{\alpha_n}(x)\} = \varphi(x)$ dla każego $x \in \mathbb{F}$. ■

Twierdzenie 4.3 (Nierówność Jensena)**.** *Niech $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem wypukłym, a ξ i $\varphi(\xi)$ należą do $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ i niech $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-ciałem. Wówczas zachodzi następująca nierówność*

$$\varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)) \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\varphi(\xi)).$$

Ponadto, jeśli φ jest ściśle wypukła, to w powyższej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)$ jest funkcją $\mathcal{M}$-mierzalną, przy czym równości zachodzą z dokładnością μ-prawie wszędzie.

DOWÓD. Niech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji afinicznych takich jak w Lemacie 4.2, tzn. $\varphi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, dla $x \in \mathbb{F}$. Korzystając z montoniczności i liniowości warunkowej wartości oczekiwanej, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\varphi(\xi)) \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(f_n(\xi)) = f_n(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi).$$

Nierówność ta formalnie zachodzi μ-prawie wszędzie. Biorąc supremum po przeliczalnym zbiorze otrzymujemy nierówność

$$\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\varphi(\xi) \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi)\} = \varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi),$$

która również zachodzi μ-prawie wszędzie.

Jasnym jest, że jeżeli $\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)$, to $\varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)) = \varphi(\xi) = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\varphi(\xi))$, bo wtedy $\varphi(\xi)$ jest $\mathcal{M}$-mierzalne. Załóżmy, że φ jest ściśle wypukła oraz że nierówność Jensena nie jest równością prawie wszędzie. Niech $\varphi'(x)$ będzie prawstronną pochodną φ w punkcie x. Ścisła wypukłość oznacza, że $\varphi(x) > \varphi'(x)(x-y) + \varphi(y)$ dla każdego $y \neq x$. Zatem

$$\varphi(\xi) > \varphi'(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi))(\xi - \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)) + \varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi))$$

na zbiorze $A := \{\xi \neq \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)\}$, a poza tym zbiorem mamy równość. Innymi słowy, funkcja

$$\eta := \varphi(\xi) - \varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)) - \varphi'(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi))(\xi - \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi))$$

jest nieujemna i zeruje się poza zbiorem A. Zbiór $B := \{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\varphi(\xi)) \neq \varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi))\} = \{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\varphi(\xi)) > \varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi))\}$ jest $\mathcal{M}$-mierzalny. Zatem jeśli założymy, że B nie jest miary zero

$$\int_B \eta \, d\mu = \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\eta) \, d\mu = \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\varphi(\xi)) - \varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)) d\mu > 0,$$

a stąd

$$\int_A \eta \, d\mu = \int_\Omega \eta \, d\mu \geqslant \int_B \eta \, d\mu > 0.$$

Zatem zbiór A nie jest miary zero co kończy dowód. ■

Wniosek 4.4. *Każda warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}^{\mathcal{M}} : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ zachowuje podprzestrzeń $L_p(\mu) \subseteq L_1(\mu)$ dla każdego $p \geqslant 1$. Ponadto obcięcie operatora $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ do podprzestrzeni $L_p(\mu)$ jest zachowującym jedynkę rzutem*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{M}} : L_p(\mu) \to L_p(\mu|_{\mathcal{M}}) \subseteq L_p(\mu),$$

o normie 1 liczonej jako norma operatora na przestrzeni $L_p(\mu)$ wyposażonej w standardową p-tą normę.

Dowód. Niech $\xi \in L_p$. Na mocy nierówności Jensena $|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi|^p \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}|\xi|^p$ oraz na mocy definicji warunkowej wartości oczekiwanej

$$\int_\Omega \mathbb{E}^{\mathcal{M}}|\xi|^p d\mu = \int_\Omega |\xi|^p d\mu < \infty.$$

Zatem $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi \in L_p(\mu)$ i operator $\mathbb{E}^{\mathcal{M}} : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ jest dobrze określony. Zbadajmy normę operatora na obcięciu

$$\|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi\|_p^p = \int_\Omega |\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi|^p d\mu \leqslant \int_\Omega \mathbb{E}^{\mathcal{M}}|\xi|^p d\mu \leqslant \int_\Omega |\xi|^p d\mu.$$

Stąd operator jest kontrakcją na obcięciu, ponadto $\chi_\Omega \in L_p(\mu)$ zatem $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ zachowuje funkcję stałą na obcięciu, a z faktu zachowywania podprzestrzeni wynika, że jest rzutem. ■

4.2 Przedłużanie rzutów z L_p do L_1

Łącząc Wniosek 4.4 z Twierdzeniem Douglasa (Twierdzenie 3.5) otrzymujemy konkluzję, że każdy zachowujący jedynkę rzut kontraktywny na $L_1(\mu)$ obcina się do kontraktywnego rzutu na $L_p(\mu)$, dla $p > 1$. Ando w pracy [1] wykazał implikację odwrotną, o ile $p \neq 2$.

Twierdzenie 4.5 (Ando, 1966). *Niech μ będzie miarą skończoną i niech $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$. Każdy zachowujący jedynkę rzut kontraktywny $E : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$, jest również kontraktywny w normie $L_1(\mu)$, tzn. dla $\xi \in L_p(\mu)$ mamy*

$$\int_\Omega |E(\xi)| d\mu \leqslant \int_\Omega |\xi| d\mu.$$

W szczególności E przedłuża się jednoznacznie do rzutu kontraktywnego $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$. Teza prawdziwa jest również dla $p = 2$, o ile dodatkowo założymy, że E jest operatorem dodatnim.

Dowód tego twierdzenia nastręcza szereg trudności technicznych i zajmie nam resztę tego podrodziału. Będziemy przyjmować następujące oznaczenia. Niech $\xi \in L_p(\mu)$, dla liczby rzeczywistej r potęga ξ^r będzie miała postać

$$\xi^r = \operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^r,$$

gdzie $\operatorname{sgn}(x) = e^{\mathrm{i}\arg x}$ dla $x \in \mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Lemat 4.6. *Niech $E : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ będzie rzutem kontraktywnym dla $p > 1$. Wtedy $\xi \in \mathcal{R}E$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\xi^r \in \mathcal{R}E^*$, gdzie $r = p - 1$, a α, β, γ będą pewnymi stałymi rzeczywistymi.*

Dowód. "$\Rightarrow$". Niech $\xi \in \mathcal{R}(E)$, zatem $E\xi = \xi$. Stąd z własności rzutu

$$\|\xi\|_p^p = \int_\Omega |\xi|^p d\mu = \int_\Omega \xi \cdot \xi^{p-1} d\mu = \int_\Omega E\xi \cdot \xi^{p-1} d\mu = \int_\Omega \xi \cdot E^*\xi^{p-1} d\mu.$$

Następnie na mocy nierówności Höldera

$$\int_\Omega \xi \cdot E^*\xi^r d\mu \leqslant \|\xi\|_p \|E^*\xi^r\|_q \leqslant \|\xi\|_p \|\xi^r\|_q = \int_\Omega \xi \cdot \xi^r d\mu.$$

Przy czym druga nierówność wynika z faktu, że sprzężenie zachowuje kontraktywność operatora, a ostatnia równość jest konsekwencją liniowej zależności funkcji dla których zastosowaliśmy nierówność Höldera. Stąd ostatecznie

$$\int_\Omega \xi \cdot \xi^r d\mu = \int_\Omega |\xi| d\mu = \|\xi\|_p^p,$$

a równość $E^*\xi^r = \xi^r$ zachodzi, co dowodzi konieczności.

"$\Leftarrow$". Zastosujemy dowód konieczności do operatora $E^* : L_q(\mu) \to L_q(\mu)$ gdzie q wykładnik hölderowsko sprzężony. Ponieważ dla $p > 1$ przestrzenie L_p są refleksywne, co oznacza że $E^{**} = E$ i

$$E^*\xi^r = \xi^r \Rightarrow E^{**}\xi^{r(q-1)} = \xi^{r(q-1)}.$$

Z równości $1/p + 1/q = 1$ wynika, że $(p-1)(q-1) = 1$. Zatem równość $E^*\xi^r = \xi^r$ implikuje, że $E\xi = \xi$. ■

Lemat 4.7. *Niech $p \in (1,2)$ i niech $E : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ będzie rzutem kontraktywnym zachowującym funkcję stałą. Dla każdego $\xi \in \mathcal{R}(E)$ mamy $\xi^r \in \mathcal{R}(E)$, gdzie $r = p-1$.*

Dowód. Na mocy Lematu 4.6 jeżeli $\xi \in \mathcal{R}(E)$ to $\xi^r \in \mathcal{R}(E^*)$. Ponieważ z założenia E zachowuje 1 i $1^r = 1$, to $1 \in \mathcal{R}(E^*)$. Zatem funkcja $1 + \xi^r/n \in \mathcal{R}(E^*)$. Ponieważ z nierówności Höldera

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p-1} = \frac{1}{\frac{q}{q-1} - 1} = q - 1,$$

to $(1 + \xi^r/n)^{1/r} \in \mathcal{R}(E)$. Rozpatrzmy następującą rodzinę funkcji

$$\eta_n := \frac{(1+\xi^r/n)^{1/r} - 1}{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Na mocy reguły d'Hospitala granica punktowa ciągu $\eta_n \xrightarrow{n\to\infty} \xi^r/r$. Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej [12] wykażemy, że ciąg ten jest zbieżny w normie L_1. W tym celu przekształcimy funkcję η_n w następujący sposób

$$\begin{aligned}\frac{(1+\xi^r/n)^{1/r} - 1}{1/n} =& \frac{(1+\xi^r/n)(1+\xi^r/n)^{1/r-1} - 1}{1/n} \\ =& \xi^r(1+\xi^r/n)^{1/r-1} + \frac{(1+\xi^r/n)^{1/r-1} - 1}{1/n}.\end{aligned}$$

Zatem

$$|\eta_n| \leqslant |\xi|^r(1+|\xi|^r/n)^{1/r-1} + \left|\frac{(1+\xi^r/n)^{1/r-1} - 1}{1/n}\right|.$$

Rozpatrzmy pierwszy ze składników. Zauważmy że, ponieważ $1/r - 1 = \frac{1-r}{r}$, to

$$|\xi|^r(1+|\xi|^r/n)^{\frac{1-r}{r}} = \alpha|\xi|,$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{|\xi|^r(1+|\xi|^r/n)^{\frac{1-r}{r}}}{|\xi|} &= \lim_{|\xi|\to\infty} |\xi|^{r-1}(1+|\xi|^r/n)^{\frac{1-r}{r}} = \lim_{|\xi|\to\infty} \frac{(1+|\xi|^r/n)^{\frac{1-r}{r}}}{|\xi|^{1-r}} \\ &= \lim_{|\xi|\to\infty} \frac{(1+|\xi|^r/n)^{\frac{1-r}{r}}}{(|\xi|^r)^{\frac{1-r}{r}}} = \lim_{|\xi|\to\infty} \left(\frac{1}{|\xi|^r} + 1/n\right) < \infty.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Rozważmy drugi ze składników

$$\frac{(1+\xi^r/n)^{1/r-1} - 1}{1/n} = \xi^r \frac{(1+\xi^r/n)^{1/r-1} - 1}{\xi^r/n}.$$

Niech $|\xi|^r/n > 1$. Wtedy

$$\xi^r \frac{(1+\xi^r/n)^{1/r-1}-1}{\xi^r/n} \leqslant \xi^r(1+\xi^r/n)^{1/r-1} \leqslant |\xi|^r(1+\xi^r/n)^{1/r-1} \leqslant \beta(1+|\xi),$$

$\beta \in \mathbb{R}^+$, na mocy obliczeń granicy (4.1). Następnie rozważmy przypadek $|\xi|^r/n \leqslant 1$ Zauważmy, że na mocy reguły d'Hospitala funkcja

$$\frac{(1+x)^{\frac{1-r}{r}}-1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1-r}{r}.$$

Zatem jest funkcją ograniczoną na zbiorze zwartym stąd

$$\xi^r \frac{(1+\xi^r/n)^{1/r-1}-1}{\xi^r/n} < \gamma.$$

Stąd funkcję η_n możemy zmajoryzować wyrażeniem $\beta(1+|\xi|+|\xi|^r)$. Oczywiście $\xi \in L_p(\mu) \Rightarrow \beta(1+|\xi|) \in L_p(\mu)$, ale zauważmy, że dla $p \in (1,2)$ na mocy Stwierdzenia 4.6, $|\xi| \in \mathcal{R}(E^*) \subseteq L_q(\mu)$ oraz z nierówności Höldera $q > 2$ i $p < q$, zatem $L_q(\mu) \subseteq L_p(\mu)$ i ostatecznie dla $p \in (1,2)$ mamy $\xi \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow \xi^{p-1} \in L_p(\mu)$. ■

Lemat 4.8. *Jeżeli $\xi \in \mathcal{R}(E)$, $r \in (0,1)$ to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\xi^{r^n} \in \mathcal{R}(E^*)$.*

Dowód. Załóżmy $\xi^{r^n} \in \mathcal{R}E^*$. Ponieważ $\xi^{r^{n+1}} = \xi^{r^{n^r}}$, to na mocy dowodu Lematu 4.7, $\xi^r \in \mathcal{R}E^*$. Zatem teza zachodzi na mocy indukcji matematycznej. ■

Dowód Twierdzenia 4.5. Niech $p \in (1,2)$. Zauważmy, że zachodzi zbieżność punktowa $\xi^{r^n} \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{sgn}(\xi)$, z drugiej strony ξ^{r^n} można zmajoryzować przez $1+|\xi|^r \in L_p(\mu)$. Połóżmy $\xi = E(\zeta)$. Mamy

$$\begin{aligned}\int_\Omega |E(\zeta)|d\mu &= \int_\Omega E(\zeta)\mathrm{sgn}(\xi)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega E(\zeta)\xi^{r^n}d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \zeta E^*(\xi^{r^n})d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \zeta\xi^{r^n}d\mu = \int_\Omega \zeta\mathrm{sgn}(\xi)d\mu \leqslant \int_\Omega \zeta d\mu \leqslant \int_\Omega |\zeta|d\mu,\end{aligned}$$

co kończy dowód dla przypadku $p \in (1,2)$.

Niech $p \in (2,\infty)$. Jeżeli E będzie zachowującym 1 rzutem kontraktywnym to na mocy Lematu 4.6 E^* również będzie rzutem kontraktywnym zachowującym 1. Stąd dla $E : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$, $p \in (2,\infty)$, na mocy dowodu poprzedniego przypadku operator E^* jest kontraktywny w normie $L_1(\mu)$. Na mocy Twierdzenia Douglasa jest również dodatni. Stąd dla $\xi \in \mathcal{R}(E)$ mamy

$$\begin{aligned}\int_\Omega |E(\xi)|d\mu &= \int_\Omega E(\xi)\mathrm{sgn}(\xi)d\mu = \int_\Omega \xi E^*(\mathrm{sgn}\xi)d\mu \leqslant \int_\Omega |\xi||E^*(\mathrm{sgn}\xi)|d\mu \\ &\leqslant \int_\Omega |\xi|E^*|\mathrm{sgn}(\xi)|d\mu \leqslant \int_\Omega |\xi|E^*(1)d\mu = \int_\Omega |\xi|d\mu,\end{aligned}$$

co dowodzi kontraktywności dla przypadku $p \in (2,\infty)$.

Niech $p = 2$. Przy założeniu, że E jest operatorem dodatnim, dowód przebiega w sposób analogiczny do przypadku powyższego. ■

4.3 Charakteryzacja rzutu kontraktywnego

Stosując Twierdzenie Ando (Twierdzenie 4.5) otrzymujemy następujące uogólnienie Twierdzeniem Douglasa (Twierdzenie 3.5) na przypadek przestrzeni $L_p(\mu)$, dla $p \geqslant 1$.

Twierdzenie 4.9 (Charakteryzacja rzutów zachowywujących funkcję stałą w przestrzeniach L_p)**.** *Operator $E : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ dla $p \geqslant 1, p \neq 2$, jest rzutem kontraktywnym zachowującym 1 wtedy i tylko wtedy gdy E jest operatorem warunkowej wartości oczekiwanej względem pewnego σ-ciała $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$.*

Teza prawdziwa jest również dla $p = 2$, o ile dodatkowo założymy, że E jest operatorem dodatnim.

Dowód. Operator warunkowej wartości oczekiwanej na $L_p(\mu)$ jest kontraktywnym rzutem na mocy Wniosku 4.4, operator ten zachowuje 1 i jest dodatni (patrz Twierdzenie 3.4).

Załóżmy że $E : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ jest dowolnym rzutem kontraktywnym zachowującym 1, oraz że E jest dodatni, o ile $p = 2$. Na mocy Twierdzenia Ando (Twierdzenie 4.5), E można przedłużyć do kontraktywnego operatora $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$. Przedłużony operator pozostaje rzutem zachowującym 1. Zatem na mocy Twierdzenia Douglasa (Twierdzenie 3.5) $E = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ dla pewnego σ-podciała $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$. ■

Przykład 4.10. Założenie o dodatniości rzutu, gdy $p = 2$ jest istotne (zarówno w Twierdzeniu 4.9 jak i w Twierdzeniu 4.5). Rzeczywiście, rozważmy przestrzeń $L_2[-1, 1]$ oraz rzut ortogonalny P na przestrzeń funkcji afinicznych, tzn. rozpiętą przez funkcje 1 oraz t. Wtedy P jest kontraktywnym rzutem danym wzorem

$$P(\xi) = \frac{\langle 1, \xi \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 + \frac{\langle t, \xi \rangle}{\langle t, t \rangle} \cdot t = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \xi(s)\, ds + \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} s\xi(s)\, ds \cdot t.$$

Oczywiście, $P(1) = 1$ zachowuje jedynkę, ale nie jest operatorem dodatnim, np. $P\chi_{[0,1]} = 1/2 + 3/4 \cdot t$ nie jest funkcją nieujemną na $[-1, 1]$. W szczególności P nie jest warunkową wartością oczekiwaną i nie jest operatorem kontraktywnym w normie L_1.

W powyższych rozważaniach, dla utrzymania klarowności dowodów, utrzymywaliśmy założenie o zachowywaniu przez rzut kontraktywny funkcji stałej. Założenie to jest dość naturalne, choćby z punktu widzenia probabilistyki. Niemniej jednak w pracach [1, 9] przedstawiono rozumowania prowadzące do opisu dowolnych rzutów kontraktywnych (niekonienicznie zachowujących funkcję stałą). Co więcej pojęcie rzutu kontraktywnego jest istotne w budowaniu charakteryzacji izometrii częściowych, gdzie założenie o niezmienniczości funkcji stałej staje się nieco sztuczne i trywializuje problem. Ponieważ kolejnym naszym krokiem jest taka ogólna charakteryzacja, potrzebny staje się ogólny opis rzutu kontraktywnego.

Zaczniemy od od ugólnienia pojęć σ-podciała oraz warunkowej wartości oczekiwanej.

Definicja 4.11 (σ-podciało z elementem maksymalnym)**.** Niech $B \in \mathcal{F}$ będzie zbiorem mierzalnym. Każde σ-podciało $\mathcal{M}$ σ-ciała $\mathcal{F}_B = \{A \in \mathcal{F} : A \subseteq B\}$ podzbiorów B będziemy nazywać *σ-podciałem $\mathcal{F}$ z elementem maksymalnym B*.

Definicja 4.12 (Warunkowa wartość oczekiwana względem σ-ciała z elementem maksymalnym)**.** Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-podciałem z elementem maksymalnym B. *Warunkową wartością oczekiwaną $\xi \in L_p(\mu)$ pod warunkiem $\mathcal{M}$* będziemy nazywali funkcję $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) \in L_p(\mu)$ spełniającą następujące warunki

(1) $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi\chi_B) = \chi_B\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi$,

(2) $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi$ jest $\mathcal{M}$-mierzalna, to jest dla każdego zbioru borelowskiego A jego przeciwobraz $(\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi)^{-1}(A) \in \mathcal{M}$,

(3) Dla każdego zbioru $A \in \mathcal{M}$ zachodzi warunek $\int_A \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi d\mu = \int_A \xi d\mu$.

Uwaga. Warunki (2) i (3) są odpowiednikami warunków (WWO1) i (WWO2) ze standardowej definicji warunkowej wartości oczekiwanej. Natomiast warunek (1) pozwala powyższą definicję sprowadzić do standardowej. Mianowicie, nietrudno spostrzec, że $\overline{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \cup \{A \cup B' : A \in \mathcal{M}\}$ jest σ-podciałem $\mathcal{F}$ oraz dla dowolnego $\xi \in L_p(\mu)$ funkcja $\chi_B\mathbb{E}^{\overline{\mathcal{M}}}\xi = \mathbb{E}^{\overline{\mathcal{M}}}(\chi_B\xi)$ spełnia warunki (1)–(3). Zatem

$$\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\xi = \chi_B\mathbb{E}^{\overline{\mathcal{M}}}\xi = \mathbb{E}^{\overline{\mathcal{M}}}(\chi_B\xi).$$

W szczególności warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)$ zawsze istnieje i ma własności (1), (2), (4) opisane w Twierdzeniu 3.4.

Przypomnijmy, że przez nośnik elementu ξ przestrzeni $L_p(\mu)$ rozumiemy zbiór $\mathrm{supp}(\xi) := \{t \in \Omega : \xi(t) \neq 0\}$, który jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do zbiorów miary zero. W szczególności inkluzję $\mathrm{supp}(\eta) \subseteq \mathrm{supp}(\xi)$ będziemy również rozumieć z dokładnością do zbiorów miary zero.

Definicja 4.13 (Ważona warunkowa wartość oczekiwana)**.** Dla każdego $h \in L_p(\mu)$ oraz σ-podciała $\mathcal{M}$ z elementem maksymalnym $\mathrm{supp}(h)$, *ważoną wartością oczekiwaną pod warunkiem $\mathcal{M}$ z wagą h* będziemy nazywać operator $E_h^{\mathcal{M}} : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ dany wzorem

$$\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}(\xi) = \frac{h}{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|h|^p)} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\left(\xi\overline{h}^{p-1}\right),$$

gdzie $\mathbb{E}^{\mathcal{M}} : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ jest warunkową wartością oczekiwaną względem $\mathcal{M}$, a wzór ma sens μ-prawie wszędzie, gdyż $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}|\xi|^p \neq 0$ μ-prawie wszędzie.

Stwierdzenie 4.14. *Dla każdego $p \in [1, \infty)$ operator $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}} : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ jest poprawnie określonym rzutem kontraktywnym. De facto operator ten jest izometrycznie równoważny warunkowej wartości oczekiwanej bez wagi.*

Dowód. Rozważmy przestrzeń $L_p((|h|^p + \chi_{\mathrm{supp}(h)'})\mu)$ z miarą μ przemnożoną przez gęstość $|h|^p + \chi_{\mathrm{supp}(h)'}$. Operator $U : L_p(\mu) \to L_p((|h|^p + \chi_{\mathrm{supp}(h)'})\mu)$ dany wzorem $U\xi = \frac{\xi}{h}\chi_{\mathrm{supp}(h)} + \xi\chi_{\mathrm{supp}(h)'}$ jest wtedy odwracalną izometrią. Oznaczając przez $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ warunkową wartość oczekiwaną pod warunkiem $\mathcal{M}$ na $L_p((|h|^p + \chi_{\mathrm{supp}(h)'})\mu)$, można sprawdzić, że

$$\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}} = U\mathbb{E}^{\mathcal{M}}U^{-1}$$

(szczegóły wystąpią w dowodzie Twierdzenia 4.18).

Jako, że P jest kontraktywnym rzutem, otrzymujemy stąd, że $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}$ również posiada te własności. ■

Uwaga. Rzut $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}$ jest warunkową wartością oczekiwaną $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}(1) = \chi_{\mathrm{supp}(h)}$.

Przykład 4.15. Rozważmy przestrzeń $L_p[-1, 1]$, funkcję znaku $h := \mathrm{sgn}$ oraz trywialne σ-ciało $\mathcal{M} = \{\emptyset, [-1, 1]\}$. Wtedy

$$\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}(\xi) = h\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi h)$$

jest kontraktywnym rzutem na jednowymiarową podprzestrzeń rozpiętą przez h. W szczególności, $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}$ nie jest rzutem dodatnim oraz $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}(1) = 0$ (nie zachowuje jedynki). Mimo to rzut $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}$ jest izometrycznie równoważny z warunkową wartością oczekiwaną $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$, mamy $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}} = U\mathbb{E}^{\mathcal{M}}U^{-1}$, gdzie $U : L_p[-1, 1] \to L_p[-1, 1]$ jest operatorem mnożenia przez h, oraz $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi) = 1\mathbb{E}(\xi)$.

Teraz wykażemy, że dla $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$, każdy kontraktywny rzut na $L_p(\mu)$ jest ważoną warunkową wartością oczekiwaną. Kluczową rolę w dowodzie tego twierdzenia odgrywa poniższy lemat.

Lemat 4.16. *Każda domknięta podprzestrzeń liniowa $\mathfrak{M} \subseteq L_p(\mu)$ posiada element z maksymalnym nośnikiem, tzn. istnieje funkcja $h \in \mathfrak{M}$ taka, że $\mathrm{supp}(\xi) \subseteq \mathrm{supp}(h)$ dla dowolnego $\xi \in \mathfrak{M}$.*

Dowód. Zacznijmy od konstrukcji ciągu $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{M}$ takiego, że $\mathrm{supp}(\xi) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(h_n)$ dla każdego $\xi \in \mathfrak{M}$. Konstrukcja jest indukcyjna. Wybierzmy $h_1 \in \mathfrak{M}$ dowolnie. Jeżeli ciąg $\{h_n\}_{n=1}^{N-1} \subseteq \mathfrak{M}$ został już wybrany, to wybierzmy $h_N \in \mathfrak{M}$ takie, że

$$\mu\left(\mathrm{supp}(h_N) - \bigcup_{i=1}^{N-1} \mathrm{supp}(h_i)\right) > \frac{1}{N},$$

o ile jest to możliwe, lub w przeciwnym razie połóżmy $h_N \equiv 0$. Załóżmy teraz nie wprost, że istnieje $\eta \in \mathfrak{M}$ takie, że $\mathrm{supp}(\eta) \not\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(h_n)$. Wtedy istnieje M takie, że $\mu\left(\operatorname{supp}(\eta) - \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(h_n)\right) > \frac{1}{M}$. To implikuje, że $h_N \neq 0$ dla $N \geqslant M$. Stąd

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(h_n)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\operatorname{supp}(h_n) - \bigcup_{i=1}^{n-1} \operatorname{supp}(h_i)\right) \\ &\geqslant \sum_{N=M}^{\infty} \mu\left(\operatorname{supp}(h_N) - \bigcup_{i=1}^{N-1} \operatorname{supp}(h_i)\right) > \sum_{N=M}^{\infty} \frac{1}{N} = \infty,\end{aligned}$$

co jest sprzeczne z naszym założeniem, że miara μ jest skończona. Normalizując ciąg $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{M}$ możemy założyć, że $\|h_n\|_p = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zaczynając od $\alpha_1 := 1$, $A_0 = \emptyset$ i $\gamma_{0,k} = 1$ dla $k \in \mathbb{N}$, skonstruujemy indukcyjnie ciągi $\{\alpha_j\}$, $\{\gamma_{j,k}\}$ oraz $\{A_j\}$, takie że kładąc $g_j := \sum_{k=1}^{j} \alpha_k h_k$ spełnione są warunki

(a) $2^{-k} \geqslant \gamma_{j-1,k} \geqslant \gamma_{j,k} > 0$ dla $k \geqslant j+1$,

(b) $\operatorname{supp}(g_j) \supseteq A_j$ oraz $\mu(\operatorname{supp}(g_j) \setminus A_j) \leqslant 2^{-j+2}$ dla $j \geqslant 1$,

(c) $\gamma_{j-1,j} \geqslant \alpha_j > 0$ oraz $\operatorname{supp}(g_j) = \bigcup_{k=1}^{j} \operatorname{supp}(h_k)$,

(d) $|g_j| > \sum_{k=j+1}^{\infty} \gamma_{j,k} |h_k|$ na A_j dla $j \geqslant 1$.

Załóżmy, że wybraliśmy już A_j, $\gamma_{j,k}$ dla $j \leqslant n-1$ i $k \geqslant j+1$, oraz α_j dla $j \leqslant n$. Wybierzmy $0 < \varepsilon < 1$, taki że

$$\mu(\operatorname{supp}(g_n) \setminus \{|g_n| > \varepsilon\}) \leqslant 2^{-n}.$$

Ponieważ

$$\mu(\{|h_k| > 2^{kn/p}) \leqslant 2^{-nk} \int |h_k|^p \, d\mu = 2^{-nk},$$

to kładąc

$$A_n := \bigcap_{k=n+1}^{\infty} \{|h_k| \leqslant 2^{kn/p}\} \cap \{|g_n| > \varepsilon\}$$

oraz

$$\gamma_{n,k} := \min\{\gamma_{n-1,k}, 2^{-k-(nk/p)}\varepsilon\}, \text{ dla } k \geqslant n+1,$$

otrzymujemy (a) i (b) dla $j = n$. W szczególności

$$\mu(\operatorname{supp}(g_n) \setminus A_n) \leqslant \mu(\operatorname{supp}(g_n) \setminus \{|g_n| > \varepsilon\}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(\{|h_k| > 2^{kn/p}\}) \leqslant 2^{-n+2}.$$

Dla różnych $0 < \alpha < \gamma_{n,n+1}$ zbiory $\operatorname{supp}(h_{n+1}) \cap \{g_n + \alpha h_{n+1} = 0\}$ są rozłączne. Dlatego co najwyżej przeliczalna ich ilość może mieć miarę dodatnią. Możemy zatem wybrać $0 < \alpha_{n+1} < \gamma_{n,n+1}$, takie że

$$\mu(\operatorname{supp}(h_{n+1}) \cap \{g_n + \alpha_{n+1} h_{n+1} = 0\}) = 0.$$

Wtedy $\operatorname{supp}(g_{n+1}) = \operatorname{supp}(g_n + \alpha_{n+1}h_{n+1}) = \operatorname{supp}(g_n) \cup \operatorname{supp}(h_{n+1})$, czyli na mocy założenia indukcyjnego zachodzi (c) dla $j = n + 1$. Na mocy definicji zbioru A_n oraz liczb $\gamma_{n,k}$, dla $t \in A_n$ mamy

$$|g_n(t)| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_{n,k}|h_k|(t) > \varepsilon - \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k-(nk/p)}\varepsilon \cdot 2^{kn/p} = \varepsilon - 2^n\varepsilon > 0,$$

co dowodzi (d) dla $j = n$.

Posiadając obiekty spełniające (a)–(d) połóżmy

$$h := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k$$

Na mocy (a) i (c) szereg ten jest zbieżny w normie, stąd $h \in \mathfrak{M}$. Dodatkowo warunek (d) zapewnia, że

$$h = g_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k h_k \neq 0$$

na zbiorze A_n. Zatem biorąc pod uwagę warunki (b) i (c) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp}(h_n) \setminus \operatorname{supp}(h)\Big) &= \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\operatorname{supp}(g_n) \setminus \operatorname{supp}(h)\Big) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \mu\left(\operatorname{supp}(g_n) \setminus A_n\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} 2^{-n+2} = 0. \end{aligned}$$

Czyli szukaną funkcją jest h. ■

Wniosek 4.17. *Obraz kontraktywnego rzutu dodatniego $E : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$, zawiera nieujemną funkcją o maksymalnym nośniku.*

Dowód. Lemat 4.16 gwarantuje istnienie pewnego $h \in \mathfrak{M} := E(L_p(\mu))$ o maksymalnym nośniku. Na mocy Lematu 3.7, który możemy zastosować do $p \geqslant 1$ dzięki Twierdzeniu 4.5, mamy wtedy również $|h| \in \mathfrak{M}$. Możemy też ten ostatni fakt dowieść wprost (daje to również krótszy dowód Lematu 3.7) jak następuje. Dla dowolnego $\xi \in \mathfrak{M}$, z dodatniości operatora E, mamy

$$|\xi| = |E(\xi)| = |E(\xi^+) - E(\xi^-)| \leqslant |E(\xi^+)| + |E(\xi^-)| = E(\xi^+ + \xi^-) = E(|\xi|).$$

W szczególności $|\xi|^p \leqslant E(|\xi|)^p$. Z drugiej strony, z kontraktywności E, mamy $\int E(|\xi|)^p \, d\mu = \|E(\xi)\|_p^p \leqslant \|\xi\|_p^p = \int |\xi|^p \, d\mu$. Stąd $E(|\xi|) = |\xi|$. Czyli $|\xi| \in \mathfrak{M}$. ■

Twierdzenie 4.18 (Charakteryzacja rzutów kontraktywnych, Ando, 1966)**.** *Operator $E : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$, dla $p \in (1, \infty) \setminus \{2\}$, jest rzutem kontraktywnym wtedy i tylko wtedy, gdy $E = \mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}$ jest ważoną warunkową wartością oczekiwaną z wagą $h \in L_p(\mu)$ oraz σ-podciałem $\mathcal{M}$ z elementem maksymalnym* $\operatorname{supp}(h)$. *(Za h można wziąć dowolną funkcję z obrazu E o maksymalnym nośniku.)*

Teza prawdziwa jest dla wszystkich $p \in (1, \infty)$, o ile dodatkowo założymy, że E jest operatorem dodatnim, a h funkcją nieujemną.

Dowód. Każda ważona warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}$ jest kontraktywnym rzutem na mocy Stwierdzenia 4.14. Jasnym jest, że $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}$ jest operatorem dodatnim, jeżeli $h \neq 0$. Zatem potrzebujemy jedynie pokazać, że (dodatni) kontraktywny rzut $E : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ jest ważoną warunkową wartością oczekiwaną (z dodatnią wagą). Stosując Lemat 4.16 do obrazu operatora E możemy wybrać $h \in E(L_p(\mu))$ o maksymalnym nośniku. Na mocy Wniosku 4.17 możemy założyć, że $h \geqslant 0$, jeśli operator E jest dodatni. Rozważmy przestrzeń z miarą skończoną $(B, \mathcal{F}_B, \mu_p)$, gdzie miarę $\mu_p := |h|^p \mu$ rozumiemy następująco

$$\int_B \xi d\mu_p = \int_B \xi |h|^p d\mu.$$

Zdefiniujmy operator ograniczony $P \in \mathcal{B}\left(L_p(B, \mathcal{F}_B, \mu_p)\right)$ wzorem

$$P\kappa := \frac{E(\kappa h)}{h}.$$

Operator ten jest dobrze określony ponieważ na B funkcja $h \neq 0$. Zauważmy następnie, że taki operator jest kontraktywnym idempotentem zachowującym funkcję χ_B. Rzeczywiście, ponieważ E na swoim obrazie działa jak identyczność to

$$P^2\kappa = P(P\kappa) = P\left(\frac{E(\kappa h)}{\kappa}\right) = \frac{E\left(\frac{E(\kappa h)}{h} h\right)}{h} = \frac{E(E\kappa h)}{h} = \frac{E(\kappa h)}{h} = P\kappa.$$

Następnie rozważmy działanie operatora P na funkcję χ_B. Zauważmy, że χ_B jest funkcją charakterystyczną h zatem

$$P\chi_B = \frac{E(\chi_B h)}{h} = \frac{E(h)}{h} = \chi_B.$$

Pozostaje zbadać normę operatora P. Korzystając ze sposobu w jaki zdefiniowaliśmy miarę μ_p mamy

$$\begin{aligned}\|P\kappa\|_{L(\mu_p)}^p &= \int_B |P\kappa|^p d\mu_p = \int_B \left|\frac{E(\kappa h)}{h}\right|^p d\mu_p = \int_B |E(h\kappa)|^p d\mu \\ &= \|E(\kappa h)\|_p^p \leqslant \|\kappa h\|_p^p = \|\kappa\|_{L(\mu_p)}^p.\end{aligned}$$

Na mocy Twierdzenia 4.9 istnieje σ-podalgebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}_B$ (z elementem maksymalnym B), taka że P jest warunkową wartością oczekiwaną względem $\mathcal{M}$ w przestrzeni $L_p(B, \mathcal{F}_B, \mu_p)$. Innymi słowy, dla każdej funkcji $\kappa \in L_p(B, \mathcal{F}_B, \mu_p)$ zachodzi następujący warunek

$$\int_A (P\kappa)|h|^p d\mu = \int_A \kappa |h|^p d\mu$$

dla każdego $A \in \mathcal{M}$.

Funkcje $(P\kappa)|h|^p$, $\kappa|h|^p$ możemy traktować jako elementy przestrzeni $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ (zerujące się poza B). Wtedy, stosując operator warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}^{\mathcal{M}} : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$, powyższy warunek można równoważnie zapisać

$$\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\left((P\kappa)|h|^p\right) = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\left(\kappa|h|^p\right).$$

Korzystając dodatkowo z $\mathcal{M}$-mierzalności funkcji $P(\kappa)$ mamy $(P\kappa)\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|h|^p) = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\kappa|h^p|)$ lub równoważnie

$$P\kappa = \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\kappa|h^p|)}{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|h|^p)}.$$

Zauważmy, że jeśli $\xi \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, to $\kappa := \frac{\xi}{h} \in L_p(B, \mathcal{F}_B, \mu_p)$ i stąd wyjściowy rzut E dany jest wzorem

$$\begin{aligned} E\xi = E(\xi\chi_B) + E(\xi\chi_{B'}) &= h\frac{E\left(\frac{\xi}{h}h\right)}{h} + E(\xi\chi_{B'}) \\ = hP\left(\frac{\xi}{h}\right) + E(\xi\chi_{B'}) &= h\frac{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}\left(\frac{\xi}{h}|h|^p\right)}{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|h|^p)} + E(\xi\chi_{B'}). \end{aligned}$$

Pozostaje kwestia wykazania, że składnik $E(\xi\chi_{B'})$ znika. Wykorzystamy tu założenie, że $p > 1$. By uprościć notację załóżmy, że $\operatorname{supp}(\xi) \subseteq B'$. Niech $\varepsilon > 0$. Z faktu, że E jest odpowiednio liniowym idempotentem, kontrakcją oraz $\operatorname{supp}(E\xi) \cap \operatorname{supp}(\xi) = \emptyset$, mamy

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)^p \int_\Omega |E\xi|^p d\mu &= \int_\Omega |E\xi + \varepsilon E\xi|^p d\mu = \int_\Omega |E(E\xi + \varepsilon\xi)|^p d\mu \\ &\leqslant \int_\Omega |E\xi + \varepsilon\xi|^p d\mu = \int_\Omega |E\xi|^p d\mu + \varepsilon^p \int_\Omega |\xi|^p d\mu. \end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{(1+\varepsilon)^p - 1}{\varepsilon^p} \int_\Omega |E\xi|^p d\mu \leqslant \int_\Omega |\xi|^p d\mu.$$

Jeżeli $p > 1$, to wyrażenie $\frac{(1+\varepsilon)^p - 1}{\varepsilon^p}$ dąży do nieskończoności, przy ε dążącym do zera. Wynika stąd, że $E\xi = 0$, co kończy dowód twierdzenia. ∎

Wniosek 4.19. *Niech $p \in (1, \infty) \setminus \{2\}$. Każda podprzestrzeń przestrzeni $L_p(\mu)$, na którą istnieje rzut kontraktywny jest postaci*

$$hL_p(|h|^p\mu|_{\mathcal{M}}) := \{h\xi \in L_p(\mu) : \xi \text{ jest } \mathcal{M}\text{-mierzalna}\} \subseteq L(\mu)$$

i na każdą taką przestrzeń istnieje dokładnie jeden rzut kontraktywny.

DOWÓD. Łatwo jest sprawdzić, że obraz rzutu $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}$, to przestrzeń $hL_p(|h|^p\mu|_{\mathcal{M}})$. Jeżeli E jest jakimś kontraktywnym rzutem na tę podprzestrzeń, to na mocy dowodu Twierdzenia 4.18 otrzymujemy, że $\widetilde{E} = \mathbb{E}_h^{\widetilde{\mathcal{M}}}$, gdyż h jest elementem o maksymalnym nośniku w $hL_p(|h|^p\mu|_{\mathcal{M}})$. Natomiast $\widetilde{\mathcal{M}}$ jest pewnym σ-podciałem z elementem maksymalnym $\operatorname{supp}(h)$ takim, że $hL_p(|h|^p\mu|_{\mathcal{M}}) = hL_p(|h|^p\mu|_{\widetilde{\mathcal{M}}})$. Stąd z dokładnością do zbiorów miary zero rodziny $\mathcal{M}$ i $\widetilde{\mathcal{M}}$ muszą się pokrywać. Dokładniej dla każdego zbioru $A \in \mathcal{M}$ istnieje $B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ taki, że $A \overset{\mu}{=} B$ i na odwrót, dla każdego $B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ istnieje $A \in \mathcal{M}$ taki, że $A \overset{\mu}{=} B$. Stąd $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}} = \mathbb{E}_h^{\widetilde{\mathcal{M}}}$. ■

Wniosek 4.20. *Niech $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$. Operator $E : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ jest rzutem kontraktywnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest izometrycznie sprzężony z warunkową wartością oczekiwaną.*

Dowód. Wynika natychmiastowo z Twierdzenia 4.18 i Stwierdzenia 4.14. ■

Na koniec, jako wniosek z dowodu Twierdzenia 4.18 skomentujemy przypadek, gdy $p = 1$. Wtedy, jak zauważył Douglas [9], opis kontraktywnych rzutów wymaga pewnej poprawki.

Twierdzenie 4.21 (Charakteryzacja rzutów kontraktywnych w L_1, Douglas, 1965)**.** *Operator $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ jest rzutem kontraktywnym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$E = \mathbb{E}_h^{\mathcal{M}} + V,$$

gdzie V jest kontrakcją taką, że $V = V\chi_{\operatorname{supp}(h)'}$, innymi słowy operator V nie jest zerem na dopełnieniu nośnika h oraz obraz V jest zawarty w obrazie $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}$ (równoważnie $V = \chi_{\operatorname{supp}(h)}V$ oraz $\frac{V\xi}{h}$ jest $\mathcal{M}$-mierzalna dla każdego $\xi \in L_1(\mu)$).

Dowód. Jeśli $E = \mathbb{E}_h^{\mathcal{M}} + V$, gdzie V jest kontrakcją z własnościami opisanymi w tezie, to łatwo sprawdzić, że E jest rzutem kontraktywnym (w szczególności mamy $V^2 = 0$). Na odwrót jeżeli $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ jest dowolnym rzutem kontraktywnym, to z dowodu Twierdzenia 4.18 wiemy, że

$$E\xi = \mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}(\xi) + E(\xi\chi_{B'}),$$

gdzie człon $E(\xi\chi_{B'})$ znikał dla $p > 1$. Dla $p = 1$ definiując $V\xi := E(\xi\chi_{B'})$ otrzymujemy tezę. ■

Wniosek 4.22. *Każda podprzestrzeń przestrzeni $L_1(\mu)$, na którą istnieje rzut kontraktywny jest postaci*

$$hL_1(|h|\mu|_{\mathcal{M}}) := \{h\xi \in L_1(\mu) : \xi \text{ jest } \mathcal{M}\text{-mierzalna}\} \subseteq L(\mu)$$

i wszystkie rzuty kontraktywne na tę podprzestrzeń są postaci $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}} + V$, gdzie $V = V\chi_{\operatorname{supp}(h)'}$ oraz obraz V jest zawarty w obrazie $\mathbb{E}_h^{\mathcal{M}}$.

Przykład 4.23. Rozważmy $\mathbb{F}^2 \cong \ell_1(\{1,2\})$ z normą $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$. Dla każdego $\lambda \in \mathcal{F}$, $|\lambda| \leqslant 1$. Operator $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ dany wzorem $T_\lambda(x,y) = (x + \lambda \cdot y, 0)$ jest kontraktywnym rzutem. Tutaj $T_0 = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ gdzie $\mathcal{M} := \{\emptyset, \{1\}\}$ oraz dla $V_\lambda(x,y) := (\lambda y, 0)$ mamy

$$T_\lambda = T_0 + V_\lambda = \mathbb{E}^{\mathcal{M}} + V_\lambda.$$

W szczególności, T_λ jest ważoną warunkową wartością oczekiwaną wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda = 0$.

Rozdział 5

Izometrie częściowe w przestrzeniach L_p

W tym rozdziale zrealizujemy temat pracy i opiszemy izometrie częściowe w przestrzeniach L_p, $p \geqslant 1$. Elegancki, kompletny opis otrzymamy w przypadku, gdy $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$ oraz dla dodatnich izometrii , gdy $p > 1$. Scharakteryzujemy również aksjomatycznie przestrzenne izometrie częściowe wprowadzone przez Phillipsa [23] i rozważane ostatnio przez wielu autorów (patrz [8, 11]).

W tym celu wykorzystamy strukturalne twierdzenia opisujące kontraktywne rzuty z poprzedniego rozdziału oraz Twierdzenie Banacha-Lampertiego opisujące izometrie pomiędzy przestrzeniami L_p. Zaczniemy od szczegółowego omówienia tego ostatniego twierdzenia wraz z pełnymi dowodami.

5.1 Twierdzenie Banacha-Lampertiego

W swojej klasycznej monografii [2], Stefan Banach stwierdził, że odwracalne izometrie na przestrzeniach $L_p[0,1]$ dla $p \neq 2$, są ważonymi operatorami kompozycji z odwracalnymi odwzorowaniami mierzalnymi. W tym podrozdziale przedstawimy pełen dowód charakteryzacji izometrii w przestrzeniach $L_p(\mu)$ z pracy Lampertiego [17], jako pewnego uogólnienia ważonych operatorów kompozycji. W tym rozdziale $(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ oraz $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu)$ będą przestrzeniami z miarami skończonymi. Jednym z zabiegów, które zastosował Lamperti, było zastąpienie odwzorowania mierzalnego $\varphi : \Omega_\mu \to \Omega_\nu$, przez ogólniejsze pojęcie odwzorowania między σ-algebrami $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$. Pojęcie to występujące w pracy Lampertiego pod nazwą *regular set isomorphism* – tu będziemy nazywać *monomorfizmem* przestrzeni z miarą.

Uwaga. W poniższym rozdziale równość zbiorów względem miary μ będziemy rozumieli w następujący sposób $A \overset{\mu}{=} B \iff \mu(A \triangle B) = 0$.

Definicja 5.1 (Morfizmy)**.** *Morfizmem* z przestrzeni $(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ w przestrzeń $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu)$ nazywać będziemy odwzorowanie $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ spełniające następujące warunki

(1) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \Phi(A) \cap \Phi(B) \overset{\mu}{=} \emptyset$,

(2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}_\nu$ i parami rozłączne $\Longrightarrow \Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{\mu}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$,

(3) $\nu(A) = 0 \implies \mu(\Phi(A)) = 0$,

dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{F}_\nu$. Jeśli implikację w warunku (3) zastąpimy równoważnością, czyli dla każdego $A \in \mathcal{F}_\nu$ zachodzi warunek

(4) $\nu(A) = 0 \iff \mu(\Phi(A)) = 0$,

to mówimy, że morfizm Φ jest *monomorfizmem*. Jeżeli dodatkowo zachodzi warunek, że

(5) dla każdego $B \in \mathcal{F}_\mu$ istnieje $A \in \mathcal{F}_\nu$ taki, że $\Phi(A) \overset{\mu}{=} B$,

to monomorfizm Φ będziemy nazywać *izomorfizmem*.

Uwaga 5.2. Przy założeniu (2), warunek (1) jest równoważny warunkowi $\Phi(\Omega) \setminus \Phi(A) \overset{\mu}{=} \Phi(\Omega \setminus A)$, który występuje w oryginalnej definicji z pracy [17]. Warunek (3) implikuje, że odwzorowanie Φ faktoryzuje się wzorem

$$[\Phi][A] := [\Phi(A)], \qquad A \in \mathcal{F}_\nu$$

do σ-addytywnego odwzorowania $[\Phi] : \mathcal{F}_\nu/_{\overset{\nu}{=}} \to \mathcal{F}_\mu/_{\overset{\mu}{=}}$ σ-zupełnych krat Boole'a. Odwzorowanie $[\Phi]$ jest injektywne wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest monomorfizmem. Morfizm Φ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $[\Phi]$ jest izomorfizmem krat Boole'a.

Przykład 5.3. Niech $\varphi : \Omega_\mu \to \Omega_\nu$ będzie odwzorowaniem mierzalnym. Wzór

$$\Phi(A) := \varphi^{-1}(A), \qquad A \in \mathcal{F}_\nu,$$

definiuje odwzorowanie $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ spełniające warunki (1), (2) w Definicji 5.1. Natomiast warunek (3) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie φ jest *nieosobliwe* co rozumiemy jako absolutną ciągłość miary ν względem miary $\mu \circ \varphi^{-1}$, gdzie $\mu \circ \varphi^{-1}(A) := \mu(\varphi^{-1}(A))$ jest miarą na przestrzeni mierzalnej $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu)$ nazywaną *popchnięciem* lub też *transportem* miary μ za pomocą odwzorowania φ. W szczególności Φ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu \sim \mu \circ \varphi^{-1}$. Jeśli dodatkowo odwzorowanie φ jest odwracalne i odwzorowanie odwrotne jest mierzalne, to Φ jest izomorfizmem. Zauważmy na koniec, że dla nieosobliwego φ *operator kompozycji*

$$T_\varphi \xi := \xi \circ \varphi$$

jest poprawanie określonym operatorem liniowym $T_\varphi : M(\nu) \to M(\mu)$ na przestrzeniach funkcji mierzalnych (gdzie utożsamiamy funkcje równe sobie prawie wszędzie).

Chcąc zdefiniować *operator kompozycji* dla dowolnego morfizmu $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ będziemy postępować w następujący sposób. Po pierwsze wprost z warunków Definicji 5.1 wynika, że wzór

$$T_\Phi\left(\sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}\right) := \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\Phi(A_n)}$$

poprawnie definiuje dodatni operator liniowy $T_\Phi : S(\nu) \to S(\mu)$, na przestrzeniach funkcji prostych $S(\nu), S(\mu)$ (gdzie utożsamiamy funkcje równe sobie prawie wszędzie). Operator $T_\Phi : S(\nu) \to S(\mu)$ jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest monomorfizmem oraz odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest izomorfizmem. Operator $T_\Phi : S(\nu) \to S(\mu)$ przedłużamy na wszystkie funkcje mierzalne w następujący sposób. Dla nieujemnej funkcji mierzalnej $\xi \in M(\nu)$ możemy wybrać niemalejący ciąg $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subseteq S(\nu)$ zbieżny punktowo do ξ. Wtedy ciąg $\{T\xi_n\}_{n=1}^\infty \subseteq S(\mu)$ jest również niemalejący, a zatem zbieżny do funkcji z $M(\mu)$. Kładziemy

$$T_\Phi\xi := \lim_{n\to\infty} T\xi_n.$$

Argument analogiczny do tego w Twierdzeniu Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej pokazuje, że definicja ta nie zależy od wyboru ciągu $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$. Dla dowolnej funkcji $\xi \in M(\nu)$ kładziemy $T_\Phi\xi := T_\Phi\xi^+ - T_\Phi\xi^-$. W ten sposób otrzymujemy poprawnie określony operator liniowy $T_\varphi : M(\nu) \to M(\mu)$. Szczegóły zostawiamy czytelnikowi (patrz też [23, Proposition 5.6]).

Przykład 5.4. Jeżeli $\Phi(A) = \varphi^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{F}_\nu$, dla pewnego odwzorowania $\varphi : \Omega_\mu \to \Omega_\nu$, jak w Przykładzie 5.3, to $T_\Phi = T_\varphi$ jest operatorem kompozycji z odwzorowaniem φ (wynika to z równości $\chi_A \circ \varphi = \chi_{\varphi^{-1}(A)}$).

Ważonym operatorem kompozycji będziemy nazywać operator $hT_\Phi : M(\nu) \to M(\mu)$ postaci

$$(hT_\Phi)\xi := h \cdot T_\Phi\xi,$$

gdzie $h : \Omega_\mu \to \mathbb{F}$ jest pewną mierzalną funkcją liczbową. Sformułujemy teraz warunek charakteryzujący kiedy takie operatory obcinają się do izometrii, $hT_\Phi : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$. W tym celu skorzystamy z pojęcia *cofnięcia* $\nu \circ \Phi^{-1}$ *miary* ν za pomocą morfizmu Φ opisanych w następującym lemacie.

Lemat 5.5. *Dla dowolnego morfizmu* $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ *wzór*

$$\nu \circ \Phi^{-1}(B) := \nu(A), \ \textit{gdzie } B \overset{\mu}{=} \Phi(A),$$

określa miarę na σ*-ciele* $\Phi(\mathcal{F}_\nu) := \{B \in \mathcal{F}_\mu : B \overset{\mu}{=} \Phi(A),\ A \in \mathcal{F}_\nu\}$ *z elementem maksymalnym* $\Phi(\Omega_\nu)$. *Jeżeli* Φ *jest monomorfizmem, to miary* $\nu \circ \Phi^{-1}$ *oraz* $\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}$ *są równoważne.*

Dowód. Rodzina $\Phi(\mathcal{F}_\nu)$ jest σ-ciałem, bo Φ zachowuje z dokładnością do zbiorów miary zero różnice i przeliczalne sumy (por. Uwaga 5.2). Warunek (2) w Definicji 5.1 implikuje σ-addytywność funkcji $\nu \circ \Phi^{-1}$. Warunek (3) w Definicji 5.1 gwarantuje, że $A \stackrel{\nu}{=} B$ implikuje $\Phi(A) \stackrel{\mu}{=} \Phi(B)$. Czyli funkcja $\nu \circ \Phi^{-1} : \Phi(\mathcal{F}_\nu) \to [0, \infty)$ jest poprawnie określona, a zatem jest miarą. Jeśli zachodzi warunek (4), to $A \stackrel{\nu}{=} B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi(A) \stackrel{\mu}{=} \Phi(B)$, co oznacza, że $\nu \circ \Phi^{-1}$ jest równoważną mierze $\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}$. ■

Stwierdzenie 5.6. *Niech $p \in [1, \infty)$. Dla dowolnego monomorfizmu $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ oraz funkcji mierzalnej $h : \Omega_\mu \to \mathbb{F}$ spełniających warunek*

$$\mathbb{E}^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}\Big(|h|^p\Big) = \frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}}, \tag{5.1}$$

ważony operator kompozycji $hT_\Phi : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ jest poprawnie określoną izometrią.

Dowód. Niech $\xi := \sum_{n=1}^N a_n \chi_{A_n}$, gdzie $\{A_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathcal{F}_\nu$ są parami rozłączne. Wtedy $\{\Phi(A_n)\}_{n=1}^N \subseteq \mathcal{F}_\mu$ są parami rozłączne z dokładnością do zbiorów miary zero. Stąd

$$\begin{aligned}\|hT_\Phi \xi\|_p^p &= \int_{\Omega_\mu} \left|\sum_{n=1}^N a_n h \chi_{\Phi(A_n)}\right|^p d\mu = \sum_{n=1}^N |a_n|^p \int_{\Phi(A_n)} |h|^p \, d\mu \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \sum_{n=1}^N |a_n|^p \int_{\Phi(A_n)} \frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}} d\mu = \sum_{n=1}^N |a_n|^p (\nu \circ \Phi^{-1})(\Phi(A_n))) \\ &= \sum_{n=1}^N |a_n|^p \nu(A_n) = \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_\nu} |a_n|^p \chi_{A_n} d\mu = \int_{\Omega_\nu} \sum_{n=1}^N |a_n \chi_{A_n}|^p d\mu \\ &= \|\xi\|_p^p.\end{aligned}$$

Zatem $hT_\Phi : S(\nu) \to L_p(\mu)$ jest izometrią, a więc jednoznacznie przedłuża się do izometrii $hT_\Phi : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$. Jako że zbieżność monotoniczna pociąga za sobą zbieżność w p-tej normie, przedłużenie to musi się pokrywać z obcięciem operatora $hT_\Phi : M(\nu) \to M(\mu)$. ■

Uwaga. W warunku (5.1) implicite zakładamy, że funkcja h jest całkowalna w p-tej potędze. Możemy tu, bez straty ogólności założyć, że h zeruje się poza zbiorem $\Phi(\Omega_\nu)$. Ponadto $h \neq 0$ na zbiorze $\Phi(\Omega_\nu)$ μ-prawie wszędzie, gdyż pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}}$ jest ściśle dodatnia μ-prawie wszędzie, co wynika z faktu, że $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \Phi(\mathcal{F}_\nu)$ jest izomorfizmem.

Twierdzenie Lampertiego [17] mówi, że każda izometria między przestrzeniami L_p, dla $p \neq 2$, jest operatorem hT_Φ opisanym w powyższym stwierdzeniu. Kluczowym krokiem w dowodzie tego twierdzenia jest fakt, że analogon tożsamości równoległoboku w przestrzeniach L_p, dla $p \neq 2$, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy nośniki rozpatrywanych funkcji są rozłącznymi zbiorami. Ogólnie zachodzą tylko nierówności, zwane nierównościami Clarksona [6, **?**].

Twierdzenie 5.7 (Nierówności Clarksona). *Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *będzie przestrzenią z miarą i niech* $\xi, \eta \in L_p(\mu)$*. Jeśli* $p \in (2, \infty)$*, to zachodzi nierówność*

$$2(\|\xi\|_p^p + \|\eta\|_p^p) \leqslant \|\xi + \eta\|_p^p + \|\xi - \eta\|_p^p.$$

Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi \cdot \eta \overset{\mu}{=} 0$.

Dla $p \in (1, 2)$ *zachodzi stwierdzenie analogicznie z tą różnicą, że nierówność zachodzi w przeciwną stronę.*

Dla wygody czytelnika dowód Twierdzenia 5.7 zamieściliśmy w dodatku A, gdzie rozważaliśmy ogólne miary (Clarkson w [6] rozważał miarę Lebesgue'a).

Teraz jesteśmy gotowi udowodnić Twierdzenie Lampertiego.

Twierdzenie 5.8 (Lamperti, 1958). *Niech* $p \neq 2$*. Operator* $U : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ *jest izometrią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy* $U = hT_\Phi$ *jest ważonym operatorem kompozycji, gdzie morfizm* $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ *oraz funkcja mierzalna* $h : \Omega_\mu \to \mathbb{F}$ *spełniają* (5.1).

Dowód. W świetle Stwierdzenia 5.6 potrzebujemy pokazać, że dla dowolnej liniowej izometrii $U : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ istnieje morfizm $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ oraz funkcja mierzalna $h : \Omega_\mu \to \mathbb{F}$ spełniające (5.1), takie że

$$U\chi_A = h\chi_{\Phi(A)}, \qquad A \in \mathcal{F}_\nu.$$

Ustalmy izometrię U i zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ następująco

$$\Phi(A) := \{x : U\chi_A(x) \neq 0\}, \qquad A \in \mathcal{F}_\nu.$$

Formalnie rzecz biorąc $\Phi(A)$ zależy od wyboru reprezentanta klasy $U\chi_A$, ale nie prowadzi to do nieporozumień – wszystkie poniższe równości dla zbiorów należy rozumieć jako równości z dokładnością do zbiorów miary zero. Pokażemy, że funkcja Φ spełnia warunki Definicji 5.1:

(1). Niech $A, B \in \mathcal{F}_\nu$ będą zbiorami rozłącznymi. Wtedy $\chi_A \cdot \chi_B = 0$, co na mocy twierdzenia Clarksona jest równoważne równości

$$\|\chi_A + \chi_B\|_p^p + \|\chi_A - \chi_B\|_p^p = 2\left(\|\chi_A\|_p^p + \|\chi_B\|_p^p\right).$$

Ponieważ U jest liniową izometrią, to powyższa równość zostanie zachowana po działaniu operatorem U, co prowadzi do równości

$$\|U\chi_A + U\chi_B\|_p^p + \|U\chi_A - U\chi_B\|_p^p = 2\left(\|U\chi_A\|_p^p + \|U\chi_B\|_p^p\right).$$

Stosując do tej równości twierdzenia Clarksona otrzymujemy, że $U\chi_A U\chi_B = 0$, czyli $\Phi(A) \cap \Phi(B) \overset{\mu}{=} 0$. To dowodzi warunku (1) z Definicji 5.1.

(2). Korzystając z (1) dla pary zbiorów rozłącznych A, B otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\Phi(A \cup B) =& \{x : U\chi_{A\cup B}(x) \neq 0\} = \{x : U(\chi_A + \chi_B)(x) \neq 0\}\\ =& \{x : U\chi_A(x) + U\chi_B(x) \neq 0\}\\ =& \{x : U\chi_A(x) \neq 0\} \cup \{x : U\chi_B(x) \neq 0\} = \Phi(A) \cup \Phi(B).\end{aligned}$$

Indukcyjnie można wykazać słuszność tej własności dla skończonej liczby zbiorów parami rozłącznych. W kolejnym kroku uogólnimy tę własność dla ciągu $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}_\nu$ zbiorów parami rozłącznych. Wtedy $\chi_{\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n} \nearrow \chi_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}}$, co wraz z Twierdzeniem Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej implikuje, że $\chi_{\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n} \xrightarrow{L_p} \chi_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}}$. Stąd $U\chi_{\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n} \xrightarrow{L_p} U\chi_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}}$. Zatem na mocy Twierdzenia Riesz'a istnieje podciąg $\{U\chi_{\bigsqcup_{n=1}^{N_k} A_n}\}_{k=1}^{\infty}$ zbieżny prawie wszędzie do $U\chi_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}}$. Stąd

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \{x : U\chi_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n}(x) \neq 0\} = \{x : \lim_{k\to\infty} U\chi_{\bigsqcup_{n=1}^{N_k} A_n}(x) \neq 0\} \\
&= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} \{x : U\chi_{\bigsqcup_{n=1}^{N_k} A_n}(x) \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} \Phi(\bigsqcup_{n=1}^{N_k} A_n) \\
&= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{N_k} \Phi(A_n) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{N_m} \Phi(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)
\end{aligned}
$$

i Φ spełnia warunki (1), (2) z Definicji 5.1.

(3). Jeżeli $\nu(A) = 0$, to $\|U\chi_A\|_p = \|\chi_A\|_p = 0$ ze względu na założenie o izometryczności U, stąd $\Phi(A) = \{x : U\chi_A(x) \neq 0\}$ jest zbiorem miary μ-zero. W drugą stronę, jeżeli $\mu(\Phi(A)) = 0$, to $0 = \|U\chi_A\| = \|\chi_A\|$, czyli $\nu(A) = 0$.

Wykazaliśmy, że Φ jest morfizmem. Zdefiniujmy funkcję h wzorem

$$h := U\chi_{\Omega_\nu}.$$

Dla każdego zbioru $A \in \mathcal{F}_\nu$ zachodzi $h = U\chi_A + U\chi_{\Omega_\nu \setminus A}$, ze względu na rozłączność zbiorów A i $\Omega_\nu \setminus A$. Ponadto $U\chi_A$ i $\chi_{\Phi(A)}$ są różne od zera na takich samych zbiorach. Zatem

$$U\chi_A = U\chi_A\chi_{\Phi(A)} = (U\chi_A + U\chi_{\Omega_\nu\setminus A})\chi_{\Phi(A)} = h\chi_{\Phi(A)} = hT_\Phi\chi_A.$$

Stąd $U = hT_\Phi$ na przestrzeni funkcji prostych $S(\nu)$. Ponieważ funkcje proste stanowią podzbiór gęsty w przestrzeniach L_p, to hT_Φ przedłuża się jednoznacznie do operatora ograniczonego na $L_p(\nu)$ i wtedy $U = hT_\Phi$ na $L_p(\nu)$.

Pozostaje sprawdzić warunek (5.1). Dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_\nu$ mamy

$$\int_{\Phi(A)} |h|^p d\mu = \int_{\Omega_\mu} |h\chi_{\Phi(A)}|^p d\mu = \int_{\Omega_\mu} |U\chi_A|^p d\mu = \|U\chi_A\|_p^p = \|\chi_A\|_p^p = \nu(A).$$

Przypomnijmy, że ν-miara zbioru A jest równa $\nu(A) = \nu \circ \Phi^{-1}(\Phi(A))$. Zatem korzystając z Twierdzenia Radona-Nikodyma mamy

$$\int_{\Phi(A)} |h|^p d\mu = \nu \circ \Phi^{-1}(\Phi(A)) = \int_{\Phi(A)} d\nu \circ \Phi^{-1} = \int_{\Phi(A)} \frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}} d\mu.$$

Dowodzi to warunku (5.1). ■

Jeśli ograniczymy się do dodatnich izometrii, to powyższe twierdzenie zachodzi również w przypadku $p = 2$. Wydaje się, że w literaturze nie rozważa się tego przypadku (tak jak to zrobił Ando z rzutami kontraktywnymi). Dla naszego wywodu jednak wydaje się to naturalne. W przypadku $p = 2$ zamiast tożsamości równoległoboku można zastosować Twierdzenie Pitagorasa, które dla nieujemnych funkcji zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy nośniki funkcji są rozłączne.

Lemat 5.9. *Jeśli $\xi, \eta \in L_2(\mu)$ są nieujemne, to $\|\xi + \eta\|_2^2 = \|\xi\|_2^2 + \|\eta\|_2^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi \cdot \eta \overset{\mu}{=} 0$.*

Dowód. Dla nieujemnych funkcji, $\xi \cdot \eta \overset{\mu}{=} 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi \perp \eta$. Zatem teza wynika z Twierdzenia Pitagorasa. ■

Twierdzenie 5.10. *Dla dowolnego $p \in [1, \infty)$. Operator $U : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ jest dodatnią izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy $U = hT_\Phi$ jest ważonym operatorem kompozycji, gdzie waga h jest nieujemna i spełnia* (5.1)*.*

Dowód. Jako że T_Φ jest dodatni, to jasne jest, że hT_Φ jest operatorem dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy $h \geqslant 0$ na $\Phi(\Omega_\nu)$ (poza tym zbiorem wartości h nie mają znaczenia). Zatem dla $p \neq 2$ teza wynika z Twierdzenia 5.8. Dla $p = 2$ teza wynika z dowodu Twierdzenia 5.8, gdzie w dowodzie własności (1) morfizmu Φ zamiast Twierdzenia Clarksona można zastosować Lemat 5.9. ■

Teraz zastosujemy powyższe twierdzenie do charakteryzacji izometrii odwracalnych, co doprowadzi nas do dowodu twierdzenia Banacha dla takich izometrii na przestrzeni $L_p[0, 1]$.

Twierdzenie 5.11 (Banach–Lamperti)**.** *Operator $U : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$, dla $p \in [1, \infty)$, jest dodatnią odwracalną izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$U = U_\Phi := \left(\frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu} \right)^{\frac{1}{p}} T_\Phi,$$

gdzie $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ jest izomorfizmem przestrzeni z miarą. Jeżeli $p \neq 2$, to U jest odwracalną izometrią (niekoniecznie dodatnią) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$U = \omega U_\Phi = \omega \left(\frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu} \right)^{\frac{1}{p}} T_\Phi,$$

gdzie $\omega : \Omega_\mu \to \{z \in \mathbb{F} : |z| = 1\}$ jest odwzorowaniem mierzalnym.

Dowód. "$\Leftarrow$". Jeśli $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ jest izomorfizmem, to $\Phi(\mathcal{F}_\nu) = \mathcal{F}_\mu$ i wtedy funkcja mierzalna h spełnia (5.1) wtedy i tylko wtedy, gdy $|h|^p = \frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu}$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy

$$h = \omega \left(\frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu} \right)^{\frac{1}{p}}$$

dla pewnej funkcji mierzalnej $\omega : \Omega_\mu \to \{z \in \mathbb{F} : |z| = 1\}$. Zatem na mocy Twierdzenia 5.8 (w zasadzie Stwierdzenia 5.6) wzór $U := \omega \left(\frac{d\nu\circ\Phi^{-1}}{d\mu}\right)^{\frac{1}{p}} T_\Phi$ definiuje izometrię i izometria ta jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega \equiv 1$, czyli gdy $U = U_\Phi$. Jasnym jest, że mnożenie przez ω jest odwracalną izometrią (mnożenie przez $\overline{\omega}$ jest jej odwrotnością). Zatem żeby wykazać, że izometria U jest odwracalna wystarczy pokazać, to dla izometrii dodatniej $U_\Phi := \left(\frac{d\nu\circ\Phi^{-1}}{d\mu}\right)^{\frac{1}{p}} T_\Phi$. Korzystając z założenia o surjektywności odwzorowania Φ możemy je odwrócić, tzn. istnieje izomorfizm $\Phi^{-1} : \mathcal{F}_\mu \to \mathcal{F}_\nu$, gdzie $\Phi^{-1}(\Phi(A)) := A$, dla $A \in \mathcal{F}_\nu$. Zarem możemy rozważyć izometrię

$$U_{\Phi^{-1}} = \left(\frac{d\mu \circ \Phi}{d\nu}\right)^{\frac{1}{p}} T_{\Phi^{-1}}.$$

Sprawdzimy, że $U_\Phi U_{\Phi^{-1}} = 1$. Najpierw zauważmy, że

$$T_\Phi \left(\frac{d\mu \circ \Phi}{d\nu}\right) = \frac{d\mu}{d\nu \circ \Phi^{-1}}. \tag{5.2}$$

Rzeczywiście, z konstrukcji Samuelsa [28] pochodnej Radona-Nikodyma (patrz też [29]), wiemy że $\frac{d\mu\circ\Phi}{d\nu}$ jest granicą wstępującego ciągu funkcji prostych postaci $\xi_n = \sum_k \frac{\mu\circ\Phi(G_{nk})}{\nu(G_{nk})} \cdot \chi_{G_{nk}}$, gdzie na zbiorze G_{nk} mamy $\frac{2^n}{k+1}\mu\circ\Phi < \nu < \frac{2^n}{k}\mu\circ\Phi$. W szczególności na zbiorze $\Phi(G_{nk})$ mamy $\frac{2^n}{k+1}\mu < \nu\circ\Phi^{-1} < \frac{2^n}{k}\mu$. Stąd

$$T_\Phi \left(\frac{d\mu \circ \Phi}{d\nu}\right) = \lim_{n\to\infty} T_\Phi \xi_n = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{\mu\circ\Phi(G_{nk})}{\nu(G_{nk})} \cdot \chi_{\Phi(G_{nk})} = \frac{d\mu}{d\nu \circ \Phi^{-1}}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} U_\Phi U_{\Phi^{-1}} &= \left(\frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu}\right)^{\frac{1}{p}} T_\Phi \left(\frac{d\mu \circ \Phi}{d\nu}\right)^{\frac{1}{p}} T_{\Phi^{-1}} \\ &= \left(\frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{d\mu}{d\nu \circ \Phi^{-1}}\right)^{\frac{1}{p}} T_\Phi T_{\Phi^{-1}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$". Niech U będzie izometrią odwracalną oraz $p \neq 2$ (odpowiednio U jest dodatnia). Na mocy Twierdzenia 5.8(odpowiednio Twierdzenia 5.10) mamy $U = hT_\Phi$, gdzie morfizm $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ oraz funkcja mierzalna $h : \Omega_\mu \to \mathbb{F}$ spełniają (5.1) (odpowiednio $h \geqslant 0$). Żeby dowieść tezy wystarczy pokazać, że $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ jest izomorfizmem (wtedy h musi być odpowiedniej postaci). W tym celu wykorzystamy znany fakt, że dla miar skończonych istnieją suprema mierzalne dowolnej (niekoniecznie przeliczalnej) rodziny zbiorów (patrz [29]). Przez *supremum mierzalne* rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_\nu$ rozumiemy zbiór $\sup \mathcal{A} \in \mathcal{F}_\nu$ taki, że

(1) $\nu(A \setminus \sup \mathcal{A}) = 0$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$,

(2) dla każdego $B \in \mathcal{F}_\nu$ takiego, że $\nu(A \setminus B) = 0$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$, zachodzi $\nu(\sup \mathcal{A} \setminus B) = 0$.

Zbiór $\sup \mathcal{A}$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do zbiorów ν-miary zero. Zauważmy, że

$$\Phi(A) = \{x : U\chi_A(x) \neq 0\} = \{\mathrm{supp}(Uf) : \mathrm{supp}(f) \subseteq A, f \in L_p(\nu)\}, \quad A \in \mathcal{F}_\nu.$$

Zatem naturalnym kandydatem na odwzorowanie odwrotne jest odwzorowanie $\Psi : \mathcal{F}_\mu \to \mathcal{F}_\nu$ dane wzorem

$$\Psi(B) := \sup\{\mathrm{supp}(U^{-1}g) : \mathrm{supp}(g) \subseteq B, g \in L_p(\mu)\}, \quad B \in \mathcal{F}_\mu.$$

Czyli $\Psi(B)$ jest supremum mierzalnym rodziny nośników funkcji postaci $U^{-1}g$ gdzie $g \in L_p(\mu)$ ma nośnik zawarty w B. Dla dowolnego $B \in \mathcal{F}_\mu$ mamy

$$\begin{aligned}\Phi(\Psi(B)) &= \sup\{\mathrm{supp}(Uf) : \mathrm{supp}(f) \subseteq \Psi(B), f \in L_p(\nu)\}\\ &= \sup\{\mathrm{supp}(Uf) : \mathrm{supp}(f) \subseteq \mathrm{supp}(U^{-1}g), \mathrm{supp}(g) \in B\}\\ &= \sup\{\mathrm{supp}(UU^{-1}g : \mathrm{supp}(g) \subseteq B\}\\ &= \sup\{\mathrm{supp}(g) : \mathrm{supp}(g) \subseteq B\} = B.\end{aligned}$$

Pierwsza równość jest konsekwencją zdefiniownia Φ jako odwzorowania z $\mathcal{F}_\nu$ w $\mathcal{F}_\mu$, druga wynika z przyjętej definicji odwzorowania Ψ, a pozostałe są konsekwencją własności supremum mierzalnego. Istotne jest, że wszystkie równości zachodzą z dokładnością do zbiorów miary zero. Stąd i z dowolności wyboru zbioru B otrzymujemy tezę, co kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 5.12. Rozważmy $\ell_p(\{1,2\}) \cong \mathbb{F}^2$ z normą $\|(x,y)\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$. Każda odwracalna izometria $U : \ell_p(\{1,2\}) \to \ell_p(\{1,2\})$ dla $p \neq 2$ jest postaci

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Natomiast dla $p = 2$ wszystkie odwracalne izometrie są postaci

$$U = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Zatem jeżeli U nie jest operatorem dodatnim, to U nie jest postaci ωU_Φ.

5.2 Izometrie częściowe w przestrzeniach L_p

W tym podrozdziale omówimy izometrie częściowe $T : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ w rozumieniu Definicji 2.6, gdzie $(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ oraz $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu)$ są przestrzeniami z miarami skończonymi. Przypomnijmy, że jeżeli T i S są wzajemnie sprzężonymi izometriami częściowymi na przestrzeni Banacha, to na ogół S nie jest jednoznacznie wyznaczone przez T (patrz Przykład 2.10), a co gorsza izometrie nie muszą być izometriami częściowymi (patrz Przykład 2.9). Zaczniemy od wykazania, że patologie te nie mają miejsca w przestrzeniach L_p dla $p \in (1, \infty)$.

Twierdzenie 5.13. *Niech $p \in [1, \infty)$. Każda liniowa izometria $U : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ jest izometrią częściową. Ponadto, jeżeli $p \neq 2$ lub U jest operatorem dodatnim, to każda izometria U jest postaci hT_Φ gdzie $\Phi : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{F}_\mu$ jest morfizmem, $h : \Phi(\Omega_\nu) \to \mathbb{F} \setminus \{0\}$ funkcją mierzalną spełniającą* (5.1) *(i nieujemną jeśli U jest dodatni), a wzór*

$$U^*\xi = T_{\Phi^{-1}} \left(\frac{\mathbb{E}_h^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)} \xi}{h} \right) = \frac{d\mu \circ \Phi}{d\nu} T_{\Phi^{-1}} \mathbb{E}^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)} \left(\xi \overline{h}^{p-1} \right).$$

definiuje izometrię częściową $U^* : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ sprzężona z U. Dla $p > 1$, U^* jest jedyną izometrią częściową sprzężoną z U. Dla $p = 1$ każda koizometria sprzężona z U jest postaci

$$U_V^* := T_{\Phi^{-1}} \frac{\mathbb{E}_h^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)} + V}{h},$$

gdzie $V = V\chi_{\mathrm{supp}(h)'}$ oraz obraz V jest zawarty w obrazie $\mathbb{E}_h^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}$.

DOWÓD. Na mocy Twierdzeń 5.8, 5.10 mamy $U = hT_\Phi$, gdzie Φ i h spełniają (5.1) (oraz h jest nieujemna o ile U jest dodatni). Jako że Φ jest monomorfizmem, to $T_\Phi : M(\nu) \to M(\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)})$ jest operatorem odwracalnym. Operatorem odwracalnym jest również $T_{\Phi^{-1}} : M(\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}) \to M(\nu)$, gdzie $\Phi^{-1} : \Phi(\mathcal{F}_\nu) \to \mathcal{F}_\nu$. W szczególności, obraz izometri U to przestrzeń $hL_p(|h|^p\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}) \subseteq L_p(\mu)$, która jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $L_p(|h|^p\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)})$ (ten izomorfizm to $f \mapsto f/h$). Na mocy Twierdzenia 2.7 izometrie częściowe sprzężone z U są w bijektywnej odpowiedniości z kontraktywnymi rzutami na tę przestrzeń. Jeśli $p > 1$, to $\mathbb{E}_h^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}$ jest jedynym rzutem kontraktywnym na obraz U (patrz Wniosek 4.19). Stąd, istnieje dokładnie jedna izometria częściowa sprzężona z U i musi ona być dana wzorem

$$\begin{aligned} U^*(\xi) &= T_{\Phi^{-1}} \frac{1}{h} \mathbb{E}_h^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}(\xi) = T_{\Phi^{-1}} \frac{1}{h} \frac{h}{\mathbb{E}^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}(|h|^p)} \cdot \mathbb{E}^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)} \left(\xi \overline{h}^{p-1} \right) \\ &\overset{(5.1)}{=} T_{\Phi^{-1}} \frac{d\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}}{d\nu \circ \Phi^{-1}} \mathbb{E}^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)} \left(\xi \overline{h}^{p-1} \right) \overset{(5.2)}{=} \frac{d\mu \circ \Phi}{d\nu} T_{\Phi^{-1}} \mathbb{E}^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)} \left(\xi \overline{h}^{p-1} \right). \end{aligned}$$

Dla $p = 1$, wszystkie rzuty kontraktywne na obraz izometrii $U = hT_\Phi$ są postaci $\mathbb{E}_h^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)} + V$, gdzie $V = V\chi_{\mathrm{supp}(h)'}$ oraz obraz $\mathcal{R}(V) \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{E}_h^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)}) = hL_p(|h|^p\mu|_{\Phi(\mathcal{F}_\nu)})$ (patrz Wniosek 4.22). Zatem na mocy Twierdzenia 2.7 każda izometria częściowa sprzężona z U jest postaci $U_V^* = T_{\Phi^{-1}} \frac{1}{h}(\mathbb{E}_h^{\Phi(\mathcal{F}_\nu)} + V)$. ■

Uwaga. Powyższe twierdzenie daje dokładny opis wszystkich ko-izometrii w przestrzeniach $L_p(\mu)$ dla $p \in [1,\infty) \setminus \{2\}$, oraz wszystkich dodatnich koizometrii w przestrzeniach $L_p(\mu)$ dla $p \in [1,\infty)$.

Wniosek 5.14. *Izometria $U : L_1(\nu) \to L_1(\mu)$ posiada dokładnie jedną ko-izometrię sprzężoną wtedy i tylko wtedy, gdy U jest operatorem odwracalnym.*

Dowód. Jeśli U jest operatorem odwracalnym, to zachodzi ogólny fakt (patrz Wniosek 2.8). Jeśli U nie jest odwracalana, to $U = hT_\Phi$, gdzie $\mathrm{supp}(h)'$ ma niezerową miarę. Zatem istnieje niezerowy operator V, taki że U^*_V jest koizometrią sprzężoną z U. ■

Wniosek 5.15 (por. Twierdzenie 4 w [1])**.** *Niech $p \in [1,\infty)$. Domknięta podprzestrzeń $\mathfrak{M} \subseteq L_p(\mu)$ jest obrazem kontraktywnego rzutu wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M}$ jest izometrycznie izomorficzna z pewną przestrzenią L_p.*

Dowód. Dowód jest dobrze znany, gdy $p = 2$. Załóżmy więc, że $p \neq 2$. Jeśli istnieje kontraktywny rzut na $\mathfrak{M}$, to $\mathfrak{M}$ jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią L_p, na mocy Wniosków 4.19 i 4.22. Ponadto, z wniosków tych wynika, że taki rzut jest dokładnie jeden wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$ lub $\mathfrak{M} = L_1(\mu)$, gdy $p = 1$. W drugą stronę jeżeli $\mathfrak{M}$ jest obrazem pewnej izometrii $U : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$, to na mocy Twierdzenia 5.13, UU^* jest kontraktywnym rzutem na $\mathfrak{M}$. ■

Każde dwa rzuty kontraktywne na tę samą podprzestrzeń są sprzężonymi do siebie izometriami częściowymi. Dla każdej właściwej podprzestrzeni przestrzeni L_1 takich rzutów istnieje nieskończenie wiele albo żaden (patrz Wniosek 4.22, por. Przykład 4.23). Dla $p > 1$ funkcja $|x|^p$ jest ściśle wypukła, co wyklucza tę patologię, bo dla funkcji ściśle wypukłych nierówność Jensena jest ostra dla funkcji nie będących w obrazie warunkowej wartości oczekiwanej (patrz Twierdzenie 4.3).

Twierdzenie 5.16. *Dla $p \in (1,\infty)$, każda izometria częściowa $T : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ posiada dokładnie jedną sprzężoną izometrię częściową $T^* : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ jest kontraktwynym rzutem. Wtedy T jest izometrycznie równoważny warunkowej wartości oczekiwanej (patrz Wniosek 4.20). Zatem bez straty ogólności możemy założyć, że $T = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ dla pewnego σ-podciała $\mathcal{M}$. Operator $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest jedynym rzutem kontraktywnym na obraz $L_p(\mu|_{\mathcal{M}})$ (patrz Wniosek 4.19). Zatem na mocy Twierdzenia 2.7 wystarczy pokazać, że podprzestrzeń $L_p(\mu|_{\mathcal{M}})$ jest jedynym dopełnieniem jądra rzutu $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$, na którym $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest izometrią. To natomiast wynika z drugiej części Twierdzenia 4.3. Rzeczywiście jeśli $\xi \in L_p(\mu) \setminus L_p(\mu|_{\mathcal{M}})$, nie jest $\mathcal{M}$-mierzalna, to nierówność Jensena $|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)|^p \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|\xi|^p)$ jest ostra na pewnym zbiorze o mierze niezerowej. Stąd

$$\|\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)\|_p^p = \int_{\Omega_\mu} |\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)|^p \, d\mu < \int_{\Omega_\mu} \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|\xi|^p) \, d\mu = \int_{\Omega_\mu} |\xi|^p \, d\mu = \|\xi\|_p^p.$$

Zatem $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ nie może być izometrią na takich elementach. Stąd $T^* = T$ jest jedyną cześciową izometrią sprzężoną z T.

Rozważmy teraz ogólną sytuację i niech $S_1, S_2 : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ będą dwiema izometriami częściowymi sprzężonymi z dowolną izometrią częściową $T : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$. Wtedy

$$(TS_2)(TS_1)(TS_2) = TS_2(TS_1T)S_2 = TS_2TS_2 = TS_2$$

i analogicznie $(TS_1)(TS_2)(TS_1) = TS_1$. Czyli rzuty TS_1 i TS_2 są wzajemnie sprzężonymi ze sobą izometriami częściowymi. Zatem na mocy pierwszej części dowodu mamy $TS_1 = TS_2$. Analogicznie $S_1T = S_2T$. Stąd $S_1 = S_1TS_1 = S_1TS_2 = S_2TS_2 = S_2$. ∎

Teraz przejdziemy do jawnego opisu izometrii częściowych. W tym celu wprowadzimy następujące pojęcie.

Definicja 5.17 (Częściowy izomorfizm)**.** *Podprzestrzenią przestrzeni z miarą* $(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ będziemy nazywać każdą przestrzeń z miarą $(M_\mu, \mathcal{M}_\mu, \mu|_{\mathcal{M}_\mu})$, gdzie $\mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{F}_\mu$ jest σ-podciałem z elementem maksymalnym M_μ. *Częściowym izomorfizmem* nazywać będziemy izomorfizm $\Phi : \mathcal{M}_\nu \to \mathcal{M}_\mu$ z podprzestrzeni $(M_\nu, \mathcal{M}_\nu, \mu|_{\mathcal{M}_\nu})$ przestrzeni $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu)$ na podprzestrzeń $(M_\mu, \mathcal{M}_\mu, \mu|_{\mathcal{M}_\mu})$ przestrzeni $(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Stwierdzenie 5.18. *Niech $p \in (1, \infty)$. każda izometria częściowa $T : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$, gdy $p \neq 2$ lub gdy T jest operatorem dodatnim, jest dana wzorem*

$$T\xi = h_\mu T_\Phi \left(\frac{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}_{h_\nu}(\xi)}{h_\nu} \right) = h_\mu T_\Phi \mathbb{E}^{\mathcal{M}} \left(\xi \cdot \frac{|h_\nu|^p}{h_\nu \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|h_\nu|^p)} \right),$$

gdzie $h_\nu \in L_p(\nu), h_\mu \in L_p(\mu)$, a $\Phi : \mathcal{M} \to \Phi(\mathcal{M})$ jest częściowym izomorfizmem z $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu)$ w $(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, elementami maksymalnymi w $\mathcal{M}$ i $\Phi(\mathcal{M})$ są odpowiednio $\operatorname{supp}(h_\nu)$ *i* $\operatorname{supp}(h_\mu)$ *oraz zachodzi warunek*

$$\frac{d\mu \circ \Phi}{d\nu|_{\mathcal{M}}} = \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|h_\nu|^p)}{T_{\Phi^{-1}}(|h_\mu|^p)}. \tag{5.3}$$

Wtedy izometria częściowa $T^* : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ sprzężona z T jest dana wzorem $T^*\xi = h_\nu T_{\Phi^{-1}} \left(\frac{\mathbb{E}^{\Phi(\mathcal{M})}_{h_\mu}(\xi)}{h_\mu} \right) = h_\nu T_{\Phi^{-1}} \mathbb{E}^{\Phi(\mathcal{M})} \left(\xi \cdot \frac{|h_\mu|^p}{h_\mu \cdot \mathbb{E}^{\Phi(\mathcal{M})}(|h_\mu|^p)} \right)$. Jeśli T jest operatorem dodatnim, to jako h_μ i h_ν mogą być wybrane funkcje nieujemne.

Dowód. Na mocy Twierdzeń 5.16, 2.7, 4.18, jeśli T jest izometrią częściową to istnieje dokładnie jedna przestrzeń M dopełniająca $\mathcal{N}(T)$, na której T jest izometrią, oraz wybierając w dowolny sposób funkcje h_ν i h_μ o maksymalnym nośniku odpowiednio w M i $\mathcal{R}(T)$, istnieją σ-podciała $\mathcal{M}_\nu \subseteq \mathcal{F}_\nu$ i $\mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{F}_\mu$

z elementami maksymalnymi $M_\nu := \operatorname{supp}(h_\nu)$ i $M_\mu := \operatorname{supp}(h_\mu)$ takie, że następujący diagram komutuje

$$\begin{tikzcd}
L_p(\nu) \arrow[r, "\mathbb{E}^{\mathcal{M}_\nu}_{h_\nu}"'] \arrow[rrr, bend left, "T"] & h_\nu L_p(|h_\nu|^p\nu|_{\mathcal{M}_\nu}) \arrow[r, "T", "\cong"'] \arrow[d, "1/h_\nu"', "\cong"] & h_\mu L_p(|h_\mu|^p\mu|_{\mathcal{M}_\mu}) \arrow[r, "\subseteq"'] \arrow[d, "\cong"', "1/h_\mu"] & L_p(\mu) \\
& L_p(|h_\nu|^p\nu|_{\mathcal{M}_\nu})) \arrow[r, "\cong", "U"'] & L_p(|h_\mu|^p\mu|_{\mathcal{M}_\mu}) &
\end{tikzcd}$$

gdzie $U : L_p(|h_\mu|^p\nu|_{\mathcal{M}_\mu})) \to L_p(|h_\mu|^p\nu|_{\mathcal{M}_\mu})$ jest odwracalną izometrią. z Twierdzenia Banacha-Lampertiego (Twierdzenie 5.11) wynika, że odwracalna izometria przekształca element o pełnym nośniku, na element o pełnym nośniku. W szczególności $T(h_\nu)$ jest elementem o maksymalnym nośniku w $\mathcal{R}(T)$. Zatem możemy tu założyć, że

$$h_\mu = T(h_\nu).$$

Wtedy izometria U zachowuje funkcję stałą. Na mocy Twierdzenia 5.11 jest to równoważne temu, że $U = T_\Phi$ dla pewnego izomorfizmu $\Phi : \mathcal{M}_\nu \to \mathcal{M}_\mu$ zachowującego odpowiednie miary, czyli spełniającego

$$\frac{d(|h_\mu|^p\nu) \circ \Phi^{-1}}{d|h_\mu|^p\mu|_{\mathcal{M}_\mu}} = 1$$

Korzystając z definicji pochodnej Radona-Nikodyma można sprawdzić, że

$$\frac{d(|h_\nu|^p\nu) \circ \Phi^{-1}}{d|h_\mu|^p\mu|_{\mathcal{M}_\mu}} = \frac{T_\Phi(|h_\nu|^p)}{\mathbb{E}^{\mathcal{M}_\mu}(|h_\mu|^p)} \cdot \frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu|_{\mathcal{M}_\mu}}.$$

Dwie ostatnie równości dają warunek

$$\frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu|_{\mathcal{M}_\mu}} = \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{M}_\mu}(|h_\mu|^p)}{T_\Phi(|h_\nu|^p)}. \tag{5.4}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
T\xi = h_\mu T_\Phi \frac{1}{h_\nu}\mathbb{E}^{\mathcal{M}_\nu}_{h_\nu}(\xi) &= h_\mu T_\Phi \left(\frac{\mathbb{E}^{\mathcal{M}_\nu}\left(\xi \overline{h_\nu}^{p-1}\right)}{\mathbb{E}^{\mathcal{M}_\nu}(|h_\nu|^p)} \right) \\
&= h_\mu T_\Phi \mathbb{E}^{\mathcal{M}_\nu}\left(\xi \frac{|h_\nu|^p}{h_\nu \mathbb{E}^{\mathcal{M}_\nu}(|h_\nu|^p)}\right).
\end{aligned}$$

Przez symetrię, dla T^* zachodzą analogiczny wzór oraz warunek do (5.4), gdzie ν i μ zamienione sa rolami, a Φ zmienione jest na Φ^{-1}. Zatem kładąc $\mathcal{M} := \mathcal{M}_\nu$, otrzymujemy tezę. ■

Twierdzenie 5.19 (Opis izometrii częściowych)**.** *Niech $p \in [1, \infty)$. Dla każdej trójki (h_μ, Φ, h_ν), gdzie $h_\mu \in L_p(\mu), h_\nu \in L_p(\nu)$ i $\Phi : \mathcal{M} \to \Phi(\mathcal{M})$ jest częściowym izomorfizmem z $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu)$ w $(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, a elementami maksymalnymi w $\mathcal{M}$ i $\Phi(\mathcal{M})$ są odpowiednio* $\mathrm{supp}(h_\nu)$ *i* $\mathrm{supp}(h_\mu)$ *i zachodzi* (5.3), *wzór*

$$U_{(h_\mu,\Phi,h_\nu)}\xi := h_\mu T_\Phi \left(\frac{\mathbb{E}^{\mathcal{M}}_{h_\nu}(\xi)}{h_\nu} \right) = h_\mu T_\Phi \mathbb{E}^{\mathcal{M}} \left(\xi \cdot \frac{|h_\nu|^p}{h_\nu \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|h_\nu|^p)} \right),$$

definiuje izometrię częściową $U_{(h_\mu,\Phi,h_\nu)} : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$, gdzie izometrią częściową do niej sprzężoną jest $U_{(h_\nu,\Phi^{-1},h_\mu)})$.

Dla $p \in (1, \infty) \setminus \{2\}$ każda izometria częściowa z $L_p(\nu)$ w $L_p(\mu)$ jest postaci $U_{(h_\mu,\Phi,h_\nu)}$. Dla $p = 2$ każda dodatnia izometria jest tej postaci.

Dowód. Druga część tezy wynika ze Stwierdzenia 5.18. Pierwszą część można sprawdzić wprost, lub odwrócić dowód Stwierdzenia 5.18 (i skorzystać ze Stwierdzeń 5.6, 4.14, by zobaczyć, że $U_{(h_\mu,\Phi,h_\nu)}$ jest złożeniem kontraktywnego rzutu i odwracalnej izometrii na podprzestrzeń, na którą istnieje rzut kontraktywny) ■

Wniosek 5.20. *Niech $p \in (1, \infty)$. Izometria częściowa $T : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy izometria częściowa sprzężona $T^* : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ jest dodatnia.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 5.19 jeśli T jest operatorem dodatnim, to $T = U_{(h_\mu,\Phi,h_\nu)}$, gdzie $h_\mu \geqslant 0$ i $h_\nu \geqslant 0$, oraz $T^* = U_{(h_\nu,\Phi^{-1},h_\mu)}$. Zatem T^* jest operatorem dodatnim. ■

Powyższy opis izometrii częściowych ma potencjalnie wiele zastosowań. Jeżeli $T = U_{(h_\mu,\Phi,h_\nu)}$ jest izometrią częściową, to mamy opis rzutów $T^*T = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}_{h_\nu}$ $TT^* = \mathbb{E}^{\Phi(\mathcal{M})}_{h_\mu}$ i sprzężonej izometrii częściowej$T^* = U_{(h_\nu,\Phi^{-1},h_\mu)}$. Można również wykorzystać powyższy opis by sprawdzić, kiedy złożenie dwóch izometrii częściowej jest izometrią częściową. To i wiele innych ciekawych pytań pozostawiamy do dalszych badań.

Na koniec przedstawimy charakteryzację *(pół)przestrzennych izometrii częściowych* w przestrzeniach L_p, pojęcia wprowadzonego przez Phillipsa w pracy [23]. Takie izometrie częściowe pełnią fundamentalną rolę m.in. w teorii L_p-algebr Cuntza [23] i L_p-algebr grafowych [8] (patrz też [11], [24]). W tym celu przypomnimy pojęcie L_p-rzutu badane przez wielu autorów (patrz [3], [30]). Przedstawimy tu krótki dowód bazujący na naszym opisie rzutów kontraktywnych i nierówności Jensena.

Definicja 5.21. Niech V będzie przestrzenią Banacha i $p \in [1, \infty)$. Powiemy, że elementy $x, y \in V$ są *p-ortogonalne*, jeżeli $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$ (czyli zachodzi p-wersja Twierdznia Pitagorasa). Rzut $E \in \mathcal{B}(V)$ jest *L_p-rzutem*, jeżeli Ex jest ortogonalne do $(1 - E)x$ dla każdego $x \in V$, czyli

$$\|x\|^p = \|Ex\|^p + \|(1 - E)x\|^p, \qquad \text{dla każdego } x \in V.$$

W szczególności L_p-rzuty są kontraktywne.

Poniższy fakt jest dobrze znany i w jego dowodzie zazwyczaj wykorzystuje się pewne nietrywialne aproksymacje funkcje funkcjami prostymi (patrz [3, Proposition 4.9] lub [30, Corollary 2]).

Lemat 5.22. *Niech $p \in (1,\infty)$ i niech E będzie rzutem na $L_p(\mu)$, gdzie $p \neq 2$ lub E jest dodatni. Operator E jest L_p-rzutem wtedy i tylko wtedy, gdy jest operatorem mnożenia przez funkcję charakterystyczną χ_M, gdzie $M \in \mathcal{F}_\mu$:*

$$E\xi = \chi_M \xi, \qquad \xi \in L_p(\mu).$$

Dowód. To że mnożenie przez funkcję charakterystyczną definiuje L_p-rzut jest jasne. Załóżmy, że E jest L_p-rzutem. Na mocy Wniosku 4.20, jeśli $p > 1$, to możemy założyć, że $E = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ jest warunkową wartością oczekiwaną względem σ-podciała $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}_\mu$ z elementem maksymalnym M. Dla $p = 1$, na mocy Twierdzenia 4.21, możemy założyć, że $E = \mathbb{E}^{\mathcal{M}} + V$, gdzie V anihiluje wszystkie funkcjez nośnikiem z M. Korzystając z tych założeń oraz nierówności Jensena, dla każdej funkcji $\xi \in L_p(\mu)$ znikającej poza M mamy

$$\begin{aligned}\int_M |\xi|^p \, d\mu = \|\xi\|_p^p = \|E(\xi)\|_p^p + \|(1-E)\xi\|_p^p = \int_\Omega |\mathbb{E}^{\mathcal{M}}(\xi)|^p \, d\mu + \|(1-E)\xi\|_p^p \\ \leqslant \int_\Omega \mathbb{E}^{\mathcal{M}}(|\xi|^p)| \, d\mu + \|(1-E)\xi\|_p^p = \int_M |\xi|^p \, d\mu + \|(1-E)\xi\|_p^p,\end{aligned}$$

stąd $\|(1-E)\xi\|_p^p = 0$. Czyli $1 - E$ anihiluje wszystkie funkcje z nośnikiem z M. Stąd $E = \mathbb{E}^{\mathcal{M}} = \chi_M$ musi być funkcją charakterystyczną ($\mathcal{M}$ składa się ze wszystkich zbiorów z $\mathcal{F}_\nu$ zawartych w M oraz $V = 0$ o ile $p = 1$). ∎

Twierdzenie 5.23 (Charakteryzacja przestrzennych izometrii częściowych)**.** *Niech $T : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$, $p \in [1,\infty)$ i $p \neq 2$ lub T jest operatorem dodatnim. Następujące warunki są równoważne:*

(1) T jest izometrią częściową, dla której T^*T i TT^* są L_p-rzutami

(2) T jest przestrzenną izometrią częściową w sensie [23], tzn.

$$T\xi = \omega \left(\frac{d\nu \circ \Phi^{-1}}{d\mu} \right)^{\frac{1}{p}} T_\Phi(\chi_{M_\nu} \xi),$$

gdzie $\Phi : \mathcal{F}_\nu|_{M_\nu} \to \mathcal{F}_\nu|_{M_\mu}$ jest izomorfizmem, dla pewnych zbiorów $M_\nu \in \mathcal{F}_\nu$, $M_\mu \in \mathcal{F}_\mu$, a $\omega : M_\mu \to \{z \in \mathbb{F} : |z| = 1\}$ jest funkcją mierzalną.

(3) $T = U_{(h_\mu,\Phi,h_\nu)}$, gdzie $\mathcal{M} = \mathcal{F}_\nu|_{\mathrm{supp}(h_\nu)}$ oraz $\Phi(\mathcal{M}) = \mathcal{F}_\mu|_{\mathrm{supp}(h_\mu)}$ są pełnymi σ-podciałami wyznaczonymi przez nośniki h_μ i h_ν.

Dowód. (1)⇒(2). Z Lematu 5.22 dostajemy, że $T^*T = \chi_{M_\nu}$ i $TT^* = \chi_{M_\mu}$, są operatorami mnożenia przez funkcje charakterystyczne pewnych zbiorów $M_\nu \in \mathcal{F}_\nu$, $M_\mu \in \mathcal{F}_\mu$. Zatem na mocy Twierdzenia 5.11 T jest postaci opisanej w (2).

(2)⇒(3). Wystarczy wziąć $h_\nu := \chi_{M_\nu}$ oraz $h_\mu := \omega \left(\frac{d\nu\circ\Phi^{-1}}{d\mu}\right)^{\frac{1}{p}}$.

(3)⇒(1). Założenia implikują, że $T^*T = \chi_{\mathrm{supp}(h_\nu)}$ i $TT^* = \chi_{\mathrm{supp}(h_\mu)}$, są operatorami mnożenia przez funkcje charakterystyczne, a więc są L_p-rzutami. ■

Dodatek A

Dowód Twierdzenia Clarksona

Dowód Twierdzenia 5.7 przeprowadzimy posługując się poniższymi lematami. Każdy lemat, jak i resztę dowodu rozpatrywać będziemy osobno dla przypadków $p \in (2, \infty)$ oraz $p \in (1, 2)$.

Lemat A.1. *Niech $p > 2$ (odpowiednio $1 < p < 2$) oraz $a, b \geqslant 0$, wówczas zachodzi $a^p + b^p \leqslant (a^2 + b^2)^{p/2}$ (odpowiednio $a^p + b^p \geqslant (a^2 + b^2)^{p/2}$), przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $ab = 0$.*

Dowód. ”$p \in (2, \infty)$”. Rozważmy funkcję $f(t) = (t^2 + 1)^{p/2} - t^p - 1$. Zauważmy, że zachodzi $f(0) = 0$ a jej pochodna

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 + 1)^{p/2} - t^p - 1 = pt(t^2 + 1)^{p/2-1} - pt^{p-1}$$

Ponieważ, $p/2 - 1 > 0$ to zachodzi nierówność

$$pt(t^2 + 1)^{p/2-1} \geqslant pt^{p-1},$$

zatem pochodna funkcji $f(t)$ jest nieujemna, stąd też dla $t \geqslant 0$ funkcja ta jest nieujemna. Następnie kładąc $t = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$, możemy zapisać

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1\right)^{p/2} \geqslant \left(\frac{a}{b}\right)^p + 1$$

co z dowolności wyboru a, b kończy dowód nierówności. Zauważmy, że dla przypadków $a = 0 \vee b = 0$ równość zachodzi w sposób oczywisty. Chcąc dowieść dostateczności warunku zauważmy, że funkcja $f(t)$, dla $t > 0$ jest ściśle dodatnia i zachodzi ostra nierówność. Stąd oraz z faktu, że $f(0) = 0$ i dowolności wyboru a i b wynika, że równość zachodzi wyłącznie dla przypadku $ab = 0$

”$p \in (1, 2)$”. Dowód przebiega analogicznie jak powyżej, jednak w tym przypadku $p/2 - 1 < 0$ zatem dla $t \geqslant 0$ funkcja $f(t)$ jest niedodatnia, stąd nierówność zachodzi w stronę przeciwną. ■

Lemat A.2. *Niech $p > 2$. Dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi nierówność*

$$|z_1|^p + |z_2|^p \leqslant \frac{1}{2}(|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p),$$

Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1, z_2 = 0$.

Dla $1 < p < 2$ zachodzi stwierdzenie analogicznie z tą różnicą, że nierówność zachodzi w przeciwną stronę.

DOWÓD. "$p \in (2, \infty)$". Na mocy Lematu A.1 zachodzi następująca nierówność

$$|z_1|^p + |z_2|^p \leqslant (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{p/2},$$

stosując do takiej nierówności tożsamość równoległoboku otrzymujemy

$$|z_1|^p + |z_2|^p \leqslant \left(\frac{1}{2}|z_1 + z_2|^2 + \frac{1}{2}|z_1 - z_2|^2\right)^{p/2}.$$

Korzystając z faktu, że funkcja $\varphi(t) = t^{p/2}$ jest ściśle wypukła zatem zachodzi nierówność

$$\left(\frac{1}{2}|z_1 + z_2|^2 + \frac{1}{2}|z_1 - z_2|^2\right)^{p/2} < \frac{1}{2}|z_1 + z_2|^p + \frac{1}{2}|z_1 - z_2|^p$$

otrzymujemy wniosek, że

$$|z_1|^p + |z_2|^p \leqslant \frac{1}{2}(|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p).$$

Zauważmy, że dla $z_1 = 0 \vee z_2 = 0$ w sposób oczywisty zachodzi równość. Następnie załóżmy, że zachodzi ostra nierówność:

$$|z_1|^p + |z_2|^p < \frac{1}{2}(|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p),$$

z drugiej strony prawdziwe są następujące związki

$$\begin{aligned}|z_1|^p + |z_2|^p &\leqslant (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{p/2} = \left(\frac{1}{2}|z_1 + z_2|^2 + \frac{1}{2}|z_1 - z_2|^2\right)^{p/2} \\ &< \frac{1}{2}(|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p),\end{aligned}$$

stąd wynika wniosek, że

$$|z_1|^p + |z_2|^p < (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{p/2}.$$

Na mocy Lematu A.1 oznacza to, że nierówność ostra zachodzi dla $z_1, z_2 \neq 0$, co jest równoważne równości przy z_1, z_2 równych zero.

"$p \in (1, 2)$". Dowód przebiega w sposób analogiczny do przypadku powyższego – korzystając z nierówności z Lematu A.1 oraz tożsamości równoległoboku. Następnie korzystamy z faktu, że dla $1 < p < 2$ funkcja $\varphi(t) = t^{p/2}$ jest ściśle wklęsła, stąd otrzymujemy tezę. ■

DOWÓD TWIERDZENIA 5.7. "$p \in (2, \infty)$". Korzystając z Lematu A.2, dla funkcji $\xi(\omega) := z_1$ i $\eta(\omega) := z_2$, otrzymujemy nierówność

$$|\xi|^p + |\eta|^p \leqslant \frac{1}{2}(|\xi + \eta|^p + |\xi - \eta|^p).$$

Całkując tę nierówność obustronnie i korzystając z faktu, że całkowanie zachowuje częściowy porządek otrzymujemy tezę twierdzenia. Załóżmy następnie, że $\xi \cdot \eta = 0$ μ-prawie wszędzie. Korzystając z tego założenia możemy zapisać

$$\int_\Omega |\xi + \eta|^p + |\xi - \eta|^p \, d\mu = \int_\Omega 2|\xi|^p + 2|\eta|^p d\mu = 2\|\xi\|_p^p + 2\|\eta\|_p^p$$

co dowodzi dostateczności warunku. W celu wykazania konieczności załóżmy, że zachodzi równość

$$\|\xi\|_p^p + \|\eta\|_p^p = \frac{1}{2}(\|\xi + \eta\|_p^p + \|\xi - \eta\|_p^p)$$

która wynika ze scałkowania równości z Lematu A.2. Stąd wniosek, że $\xi \cdot \eta = 0$ z dokładnością do równości μ-prawie wszędzie.

Dla przypadku $1 < p < 2$ dowód przebiega w sposób analogiczny. ■

Bibliografia

[1] Ando T., *Contractive projections in L_p spaces*, Pacific J. Math. 17 (1966) 391.

[2] Banach S., Theorie des operations lineaires, Warsaw, 1932.

[3] Behrends E., Danckwerts R., Evans R., Göbel S., Greim P., Meyfarth K., and Müller W., L_p-structure in real Banach spaces, Springer-Verlag, 1977.

[4] Bernau S., Lacey H. *The range of a contractive projection on an L_p-space*, Pacific J. Math. 53 (1974), 21.

[5] Billingsley P., Prawdopodobieństwo i miara, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1987.

[6] Clarkson, J. A. *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 no. 3 (1936), 396.

[7] Conway J.B., A Course in Functional Analysis, Springer, 1997.

[8] Cortiñas G., Rodriguez M. E., *L_p-operator algebras associated with oriented graphs*, J. Operator Theory 81 (2019), 225.

[9] Douglas R. G., *Contractive projections on an L_1 space*, Pacific J. Math. 15 (1965) 443.

[10] Gardella E., Thiel H., *Isomorphisms of Algebras of Convolution Operators* (2018), arXiv:1809.01585.

[11] Gardella E., *A modern look at algebras of operators on L_p-spaces* (2019), arXiv:1909.12096.

[12] Halmos P. R., Measure Theory, Springer, 1974.

[13] Holtz, O., Karow, M. *Real and Complex Operator Norms* (2005) arXiv:0512608.

[14] Kwaśniewski B. K. "Analiza spektralna operatorów generujących nieodwracalne układy dynamiczne" Rozprawa doktorska, IM PAN, 2009, Warsaw.

[15] Lawson M. V. "Inverse semigroups: the theory of partial symmetries". World Scientific, 1998.

[16] Jakubowski J., Sztencel R., Wstęp do teorii prawdopodobieństwa, Script, 2010.

[17] Lamperti J., *On the isometries of certain function-spaces.* Pacific J. Math. Volume 8, Number 3 (1958), 459.

[18] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces I, II, Springer, 1996.

[19] Mbekhta M., *Partial isometries and generalized inverses*, Acta Sci. Math., V. 70 (2004), 767.

[20] Mlak W., Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.

[21] Murphy G. J., C^*-algebras and Operator theory, Academic Press, London 1990.

[22] Paterson A. L. T. "Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras", Springer, 1999.

[23] Phillips N. C., *Analogs of Cuntz algebras on L_p spaces* (2012), arXiv:1201.4196.

[24] Phillips N. C., *Crossed products of L_p operator algebras and the K-theory of Cuntz algebras on L_p spaces* (2013), arXiv:309.6406.

[25] Randrianantoanina B., *Norm one projections in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. 5 (2001), 35.

[26] Rao M. M., Measure Theory and Integration, CRC Press, 2004.

[27] Rudin W., Analiza funkcjonalna, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.

[28] Samuels S. M., *The Radon-Nikodym Theorem as a Theorem in Probability*, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 3 (1978), 155.

[29] Stępkowski Ł., Ogólne twierdzenie Radona-Nikodyma i jego zastosowania, Praca Magisterska, Wydział Matematyki UwB, 2021.

[30] Sullivan F. E., *Structure of real L_p spaces*, J. Math. Anal. Appl. 32 (1970), 621.

[31] Takesaki M. , Theory of operator algebras I, Springer-Verlag Berlin 2002.

[32] Traczyk T., Wstęp do teorii algebr Boole'a, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.