

UNIwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki

Alina Kościukiewicz

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa
dla operatorów na kratach
Banacha

Praca magisterska napisana

pod kierunkiem

dr. hab. Bartosz Kwaśniewski, prof. UwB

Białystok 2025

Składam serdeczne podziękowania
dr. hab. Bartoszowi Kwaśniewskiemu,
za okazaną życzliwość, motywujące uwagi,
otwartość na dyskusję oraz wszechstronną pomoc
w trakcie przygotowywania niniejszej pracy.

Alina Kościukiewicz

Spis treści

Wstęp	1
1 Kraty wektorowe	3
1.1 Częściowy porządek i kraty	3
1.2 Uporządkowane przestrzenie wektorowe	9
1.3 Kraty Wektorowe	12
1.4 Ideały porządkowe	20
2 Kraty Banacha	23
2.1 Przestrzenie Banacha	23
2.2 Kraty Banacha	26
2.3 Abstrakcyjne L^p -przestrzenie i M -przestrzenie	28
2.4 Zespółone kraty Banacha	33
3 Operatory na kratkach Banacha	38
3.1 Operatory na przestrzeniach Banacha	38
3.2 Elementy teorii spektralnej	44
3.3 Operatory dodatnie na kratkach Banacha	49
3.4 Twierdzenie Perrona-Frobeniusa dla dodatnich operatorów zwartych	52
3.4.1 Zastosowanie do operatorów niedodatnich	61
Bibliografia	66

Wstęp

Teoria krat Banacha została zapoczątkowana w drugiej połowie lat trzydziestych ubiegłego wieku przez trzech matematyków: F. Riesz (1929, 1936), L. V. Kantorowicz (1935), i H. Freudenthal (1936), patrz [24], [23], [2], przez długi czas była uważana za podstawowy i ważny dział analizy funkcjonalnej. Wiele ważnych przestrzeni rozważanych w analizie, w tym większość przestrzeni funkcyjnych ma strukturę krat wektorowych. Teoria krat Banacha jest ściśle związana z teorią miary, teorią funkcji rzeczywistych, analizą wypukłą i topologią ogólną, posiada również zastosowania w teorii spektralnej operatorów, w ekonomii matematycznej czy w fizyce matematycznej. Ważnymi standardowymi przykładami krat Banacha są przestrzenie funkcji ciągłych $C(M)$ na zwartej przestrzeni Hausdorffa M oraz wiele różnych przestrzeni funkcji mierzalnych na pewnej przestrzeni z miarą μ , w tym klasyczne przestrzenie $L^p(\mu)$ funkcji całkowalnych w p -tej potęgze, dla $p \in [1, \infty)$. W kontekście wyżej wymienionych przestrzeni język krat Banacha okazuje się bardzo naturalny i prowadzi do ich aksjomatycznej ogólnej teorii – tak zwanych *abstrakcyjnych M -przestrzeni* oraz *abstrakcyjnych L^p -przestrzeni*, zapoczątkowanej w pionierskich pracach S. Kakutaniego [12], [13], rozwijanej m.in. przez H. Nakano, a która uzyskała piękny dojrzwały kształt w pracy F. Bohnenblusta [5], patrz [19]. Co więcej jak wynika z ostatnich artykułów, współautorstwa promotora niniejszej pracy magisterskiej, patrz [4], język i narzędzia krat Banacha są bardzo użyteczne w obecnie bardzo popularnej i silnie rozwijanej teorii L^p -algebr operatorowych, patrz np. [9]. Daje to duże nadzieje na dalsze zastosowania oraz kolejne ożywienie i rozwój tego klasycznego już działu analizy funkcjonalnej.

Jednym z pośrednich celów niniejszej pracy magisterskiej jest opracowanie pełnego wstępu do teorii krat Banacha oraz teorii spektralnej operatorów dodatnich. Wydaje się, że poza skryptowymi notatkami [14], które pomijają większość dowodów, nie istnieją w tym zakresie źródła w języku polskim. Natomiast liczne źródła w języku angielskim, np. [23], [21], [2], [24], [1], patrzą na wyżej wymienione zagadnienia w różny sposób, co z punktu widzenia współczesnego studenta, po jedynie podstawowym kursie analizy funkcjonalnej [18], również wymaga pewnej syntezy, doboru tematów oraz uzupełnień. Bardziej konkretnym celem i motywacją obecnej pracy jest omówienie podstawowej wersji twierdzenia Perrona–Frobeniusa dla operatorów dodatnich na kratkach Banacha.

Klasyczne twierdzenie Perrona–Frobeniusa, sformułowane na początku XX wieku, jest jednym z fundamentalnych wyników dotyczących struktur spektralnych macierzy nieujemnych, które znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach nauki, patrz [25]. Na przykład w teorii prawdopodobieństwa twierdzenie Perrona – Frobeniusa umożliwia sprytne znalezie-

nie macierzy przejścia Łańcuchu Markowa. Podobnie w demografii ułatwia modelowanie populacji metodą Leslie'go. Co więcej codziennie nieświadomie korzystamy z tego twierdzenia, wpisując zapytanie w wyszukiwarke Google (algorytm PageRank). W swojej klasycznej macierzowej postaci twierdzenie to gwarantuje dla macierzy dodatniej (o nieujemnych współczynnikach), istnienie dominującej wartości własnej oraz dodatniego wektora własnego z nią związanego. Zatem aby wysławić Twierdzenie Perrona-Frobeniusa, potrzebujemy teorii spektralnej, która jest sformułowana dla ogólnych zespolonych przestrzeni Banacha, oraz pojęcia dodatniości i operatorów dodatnich, które formułuje się w języku krat wektorowych. W szczególności, twierdzenie to w języku operatorów na zespolonych kratach Banacha mówi, że dla operatorów dodatnich na skończone wymiarowych kratach Banacha promień spektralny należy do widma punktowego i jako wartość własna posiada dodatni wektor własny.

W niniejszej pracy przedstawimy pełną teorię prowadzącą do uogólnienia powyższego twierdzenia Perrona-Frobeniusa na przypadek nieskończone wymiarowych krat Banacha. Po raz pierwszy taką wersję udowodnili M. G. Krein i M. A. Rutman [15] i odtąd stała się ona jedną z wielu motywacji do rozwijania teorii operatorów dodatnich, [23], [3]. Tak jak istnieje wiele nieco różniących się od siebie sformułowań twierdzenia Perrona-Frobeniusa, tak i istnieje wiele jego możliwych uogólnień. Tutaj skupimy się na najbardziej ogólnej i podstawowej formie tego twierdzenia i udowodnimy je dla dodatnich operatorów zwartych na zespolonych kratach Banacha. Przy czym omówimy je na szeregu przykładów i podejmiemy próbę zastanowienia się, czy może ono mieć jakieś zastosowanie do operatorów niekoniecznie dodatnich, poprzez zbadanie związków widma operatora i jego modułu.

Celem pracy jest omówienie uogólnionej wersji twierdzenia Perrona-Frobeniusa dla operatorów liniowych dodatnich i zwartych na kratach Banacha, przedstawienie dowodu tego twierdzenia oraz zilustrowanie go przykładami. W pracy korzystamy z narzędzi analizy funkcjonalnej, teorii operatorów i porządków w przestrzeniach Banacha.

Zgodnie z klasyczną zasadą trójjpodziału praca składa się z trzech rozdziałów.

W pierwszym rozdziale dość szczegółowo omawiamy kraty wektorowe, o których można myśleć jako spójnym połączeniu dwóch struktur – przestrzeni wektorowej (czyli struktury liniowej) oraz kraty (czyli struktury porządkowej). Przypominamy tu m.in. pojęcie częściowego porządku i kraty, oraz dowodzimy szeregu podstawowych własności uporządkowanych przestrzeni wektorowych i krat wektorowych. Całość obrazujemy na szeregu przykładów.

W rozdziale drugim, do uprzednich struktur dyskretnych, dołączamy normę. Przypominamy podstawowe fakty z teorii przestrzeni Banacha, a następnie omawiamy stopniowo zawężane struktury, kratę Banacha oraz abstrakcyjne L^p -przestrzenie i abstrakcyjne M -przestrzenie. Ważną częścią tego rozdziału jest również omówienie zespolonych krat Banacha, których już sama definicja, a w szczególności definicja modułu i normy, jest nietrywialna i odbywa się poprzez kompleksyfikację rzeczywistych krat Banacha.

W ostatnim rozdziale przechodzimy do teorii operatorów. Przypominamy tu pojęcia dotyczące operatorów ograniczonych na przestrzeniach Banacha oraz elementy ich teorii spektralnej. Następnie omawiamy operatory dodatnie na kratach Banacha i ostatecznie przedstawiamy główne twierdzenie pracy wraz z dowodem i przykładami zastosowania do operatorów niedodatnich.

Rozdział 1

Kraty wektorowe

1.1 Częściowy porządek i kraty

W niniejszym podrozdziale przypomnimy podstawowe fakty z teorii krat. Istnieje wiele dobrych źródeł na ten temat. My opieraliśmy się głównie na [6], [3] i [10]. W całym podrozdziale X będzie ustalonym zbiorem.

Definicja 1.1. *Częściowym porządkiem, czy też krócej porządkiem na zbiorze X nazywamy relację $\leq$ spełniającą następujące warunki*

(zwrotność) $x \leq x$ dla każdego $x \in X$;

(przechodniość) $x \leq y$ oraz $y \leq z$ implikuje $x \leq z$ dla każdych $x, y, z \in X$;

(antysymetria) $x \leq y$ oraz $y \leq x$ implikuje $x = y$ dla każdych $x, y \in X$.

Mówimy, że zbiór X jest (częściowo) uporządkowany, jeżeli $\leq$ jest częściowym porządkiem na X , formalnie para $(X, \leq)$ jest (częściowo) uporządkowana. Gdy $x \leq y$ mówimy, że element x jest *mniej lub równy* y , lub krócej *mniej* od y , oraz że element y jest *większy lub równy* x , lub krócej *większy* od x .

Przykład 1.2. Rodzina $\mathcal{P}(A)$ wszystkich podzbiorów zbioru A (czyli zbiór potęgowy) wraz z relacją zawierania $\subseteq$ jest zbiorem uporządkowanym. W szczególności, każda podrodzina $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ jest zbiorem uporządkowanym. Co więcej, z dokładnością do izomorfizmu (bijekcji zachowującej porządek) każdy zbiór częściowo uporządkowany jest tej postaci.

Przykład 1.3. Relacja większy równy $\leq$ zadana na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest porządkiem, a nawet *porządkiem liniowym*, czyli każde dwa elementy są porównywalne: dla dowolnych x, y mamy $x \leq y$ lub $y \leq x$.

Przykład 1.4. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ częściowy porządek można zadać “po współrzędnych”. To znaczy dla wektorów $x = (x(1), x(2), \dots, x(n))$, $y = (y(1), y(2), \dots, y(n)) \in \mathbb{R}^n$ piszemy

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff} x(k) \leq y(k) \text{ dla każdego } k = 1, \dots, n.$$

Jeśli $n > 1$, nie jest to porządek liniowy bo na przykład wektory $(1, 0, \dots, 0)$ oraz $(0, 1, 0, \dots, 0)$ są nieporównywalne.

Przykład 1.5. Niech $F(M)$ będzie zbiorem funkcji rzeczywistych $x : M \rightarrow \mathbb{R}$. Naturalnym częściowym porządkiem na $F(M)$ jest relacja $\leq$ zdefiniowana punktowo

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff} x(t) \leq y(t) \text{ dla każdego } t \in M,$$

dla dowolnych $x, y \in F(M)$. Zauważmy, że jeśli $M = \{1, \dots, n\}$, to $F(M)$ możemy utożsamić z $\mathbb{R}^n$ i wtedy otrzymujemy częściowy porządek z poprzedniego przykładu.

Przykład 1.6. Jeżeli (M, Σ, μ) jest przestrzenią z miarą, to na zbiorze funkcji mierzalnych $\mathcal{M}(M)$ naturalną relacją jest *nierówność μ -prawie wszędzie*. Mianowicie, dla funkcji mierzalnych $x, y : M \rightarrow \mathbb{R}$ piszemy

$$x \stackrel{\mu\text{-pw}}{\leq} y \stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(\{t \in M : x(t) > y(t)\}) = 0.$$

Ta relacja jest zwrotna i przechodnia. Rzeczywiście, $x \stackrel{\mu\text{-pw}}{\leq} x$, gdyż

$$\mu(\{t \in M : x(t) > x(t)\}) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Natomiast jeśli $x \stackrel{\mu\text{-pw}}{\leq} y$ i $y \stackrel{\mu\text{-pw}}{\leq} z$, czyli $x(t) \leq y(t)$ i $y(t) \leq z(t)$ poza odpowiednio zbiorami miary zero $A, B \in \Sigma$, to $x(t) \leq z(t)$ poza sumą $A \cup B$ tych zbiorów. Jako że suma zbiorów miary zero jest zbiorem miary zero, otrzymujemy więc że $x \stackrel{\mu\text{-pw}}{\leq} z$.

Natomiast formalnie rzecz biorąc relacja ta nie jest antysymetryczna. Mianowicie, obie relacje $x \stackrel{\mu\text{-pw}}{\leq} y$ oraz $y \stackrel{\mu\text{-pw}}{\leq} x$ zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje x i y są *równe sobie μ -prawie wszędzie*, tzn. gdy

$$x \stackrel{\mu\text{-pw}}{=} y \stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(\{t \in M : x(t) \neq y(t)\}) = 0.$$

Zatem aby mówić o relacji $\stackrel{\mu\text{-pw}}{\leq} y$ jako o częściowym porządku potrzebujemy utożsamić funkcje równe sobie μ -prawie wszędzie. Dlatego, korzystając z tego, że $\stackrel{\mu\text{-pw}}{=}$ jest relacją równoważności, formalnie będziemy rozważać zbiór klas abstrakcji

$$L_0(\mu) := \{[x] : x \in \mathcal{M}(M)\}, \quad [x] = [y] \Leftrightarrow x \stackrel{\mu\text{-pw}}{=} y,$$

na którym relacja

$$[x] \leq [y] \stackrel{\text{def}}{\iff} x \stackrel{\mu\text{-pw}}{\leq} y$$

jest już porządkiem (antysymetria wynika wprost z konstrukcji). Z definicji elementami przestrzeni $L_0(\mu)$ są klasy abstrakcji $[x]$, a nie funkcje x . Jednak standardowo dla uproszczenia języka i notacji nazywa się je funkcjami i przy zapisie pomija się nawiasy, tzn. pisze się x w miejsce $[x]$. Nie prowadzi to do nieporozumień, tak długo jak pamiętamy, że w przestrzeni $L_0(\mu)$ utożsamiamy funkcje równe sobie μ -prawie wszędzie. Zgodnie z tą konwencją zbiór $L_0(\mu)$ nazywamy *zbiorem funkcji mierzalnych*.

Definicja 1.7. Niech $Y \subseteq X$ będzie podzbiorem zbioru uporządkowanego. Mówimy, że $x \in Y$ jest elementem *maksymalnym* (odpowiednio *minimalnym*) zbioru Y jeżeli dla każdego $y \in Y$ takiego, że $x \leq y$ (odpowiednio $y \leq x$) mamy $x = y$. Powiemy, że $x \in Y$ jest elementem *największym* (*najmniejszym*) zbioru Y jeżeli $y \leq x$ ($x \leq y$) dla każdego $y \in Y$. *Ograniczeniem górnym* (*dolnym*) zbioru Y nazywamy element $x \in X$ spełniający $y \leq x$ ($x \leq y$) dla wszystkich $y \in Y$. Element najmniejszy, spośród ograniczeń górnych zbioru Y nazywamy *supremum* tego zbioru (lub *kresem górnym*) i oznaczamy $\sup Y$. Natomiast element największy, spośród ograniczeń dolnych zbioru Y nazywamy *infimum* tego zbioru (lub *kresem dolnym*) i oznaczamy $\inf Y$.

Uwaga 1.8. Jeśli w pewnym zbiorze istnieje element największy, to jest on jedynym elementem maksymalnym tego zbioru a także jego kresem górnym. Na ogół zbiór może mieć wiele elementów maksymalnych, lub nie mieć ich wcale. Może też się zdarzyć, że zbiór ma dokładnie jeden element maksymalny, ale nie ma elementu największego. Jeżeli supremum zbioru może do niego nie należeć, a jeżeli należy to jest jego elementem największym. Podobne zależności zachodzą też między infimum, elementami najmniejszymi i elementem minimalnym.

Uwaga 1.9 (Zasada dualności). Dla każdego zbioru uporządkowanego $(X, \leq)$ można zdefiniować relację $x \geq y \stackrel{\text{def}}{\iff} y \leq x$, dla dowolnych $x, y \in X$, która jak łatwo sprawdzić, jest również porządkiem. Parę $(X, \geq)$ nazywamy *dualnym odpowiednikiem* pary $(X, \leq)$. Jeśli w zdaniu dotyczącym porządku zastąpimy wszystkie wystąpienia relacji $\leq$ (jawne lub niejawne) przez relację $\geq$ otrzymamy zdanie do niego *dualne*. Na przykład pojęcia supremum oraz infimum są do siebie dualne (podobnie jak pojęcia elementu największego i najmniejszego, oraz maksymalnego i minimalnego). W szczególności,

zdanie dualne do zdania prawdziwego dla wszystkich zbiorów częściowo uporządkowanych jest prawdziwe.

Powyższa zasada pozwala formalnie pomijać dowody dualnych faktów, które w literaturze zbywa się często stwierdzeniem, że "dowód jest analogiczny".

Teraz pokażemy, że supremum sumy zbiorów to supremum supremów jej składników. Analogicznie zachodzi zdanie dualne z infimum. Jest to ogólna forma wyrażenia faktu, że operacje $\sup$ oraz $\inf$ są łączne (tam gdzie określone).

Stwierdzenie 1.10 (Łączność supremum i infimum). Niech $\{E_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru uporządkowanego X oraz niech $E = \bigcup_{i \in I} E_i$.

- (1) Jeśli dla każdego $i \in I$ istnieje $\sup E_i$ oraz istnieje $\sup_{i \in I} \sup E_i$, to istnieje $\sup E$ oraz $\sup E = \sup_{i \in I} \sup E_i$.
- (2) Jeśli dla każdego $i \in I$ istnieje $\inf E_i$ oraz istnieje $\inf_{i \in I} \inf E_i$, to istnieje $\inf E$ oraz $\inf E = \inf_{i \in I} \inf E_i$.

DOWÓD. 1) Weźmy $y \in E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Wtedy istnieje indeks $i \in I$, dla którego $y \in E_i$ oraz zachodzi $y \leq \sup E_i \leq \sup_{i \in I} \sup E_i$. Zatem $\sup_{i \in I} \sup E_i$ jest ograniczeniem górnym zbioru E . Pokażemy, że $\sup_{i \in I} \sup E_i$ jest elementem najmniejszym spośród ograniczeń górnych zbioru E . Niech $x \in X$ będzie innym ograniczeniem górnym zbioru $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Wtedy $x \geq e$ dla każdego $e \in E$, czyli w szczególności $x \geq y$ dla dowolnego $y \in E_i$ i dla każdego $i \in I$, oraz z definicji supremum $x \geq \sup E_i$. Mamy więc, że $x \geq \sup E_i$ dla każdego $i \in I$. Więc x jest ograniczeniem górnym zbioru $\{\sup E_i\}_{i \in I}$, a z definicji supremum $x \geq \sup_{i \in I} \sup E_i$. Więc supremum zbioru E istnieje i wynosi $\sup E = \sup_{i \in I} \sup E_i$.

2) Jest to zdanie dualne do zdania 1), zachodzi więc z Uwagi 1.9. $\square$

Definicja 1.11. *Kratą* nazywamy uporządkowany zbiór X , w którym dla każdej pary elementów $x, y \in X$ istnieją $\sup\{x, y\}$ oraz $\inf\{x, y\}$.

Uwaga 1.12. Jeśli wszystkie pary elementów $x, y \in X$ posiadają supremum, to stosując Stwierdzenie 1.10 oraz indukcję matematyczną, otrzymujemy, że każdy skończony ciąg $x_1, \dots, x_n \in X$ będzie miał supremum oraz

$$\sup\{x_1, \dots, x_n\} = \sup\{\sup\{x_1, \dots, x_{n-1}\}, x_n\}$$

Analogiczne (dualne) stwierdzenie zachodzi dla infimów. Zatem krata to uporządkowany zbiór, w którym wszystkie niepuste skończone podbiory posiadają suprema i infima.

Przykład 1.13. Zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$ dowolnego zbioru A , wraz z porządkiem zadany przez zawieranie $\subseteq$ jest kratą. Supremum podzbiorów w tej kratce jest równe ich sumie, a infimum ich części wspólnej. To znaczy, dla $B, C \in \mathcal{P}(A)$ mamy

$$\sup\{B, C\} = B \cup C \quad \text{oraz} \quad \inf\{B, C\} = B \cap C.$$

Przykład 1.14. Zbiór dodatnich dzielników $\mathcal{D}(n)$, dowolnej liczby naturalnej n , uporządkowany przez relację podzielności $|$ jest kratą. W tej kratce supremum dwóch dzielników $a, b \in \mathcal{D}(n)$ jest równe ich najmniejszej wspólnej wielokrotności $\sup\{a, b\} = \text{NWW}(a, b)$, a infimum ich największemu wspólnemu dzielnikowi $\inf\{a, b\} = \text{NWD}(a, b)$.

Przykład 1.15. Podprzestrzenie skończone wymiarowej przestrzeni liniowej V , uporządkowane przez zawieranie $\subseteq$ również tworzą kratę. W tym przykładzie supremum dwóch podprzestrzeni $U, W \subseteq V$ jest równe ich sumie algebraicznej $\sup\{U, W\} = U + W$, a infimum ich części wspólnej $\inf\{U, W\} = U \cap W$.

Definicja 1.11 przedstawia kratę w znaczeniu porządkowym. Jednak można tę strukturę zdefiniować również w sposób algebraiczny, jak w poniższej Definicji 1.16. W Stwierdzeniach 1.17, 1.18 pokażemy, że definicje te są równoważne.

Definicja 1.16. Niech $\vee$ i $\wedge$ będą działaniami dwuargumentowymi na zbiorze X . Trójkę $(X, \vee, \wedge)$ nazwiemy *kratą algebraiczną* jeżeli dla dowolnych $x, y, z \in X$ zachodzą

$$(\text{\textbf{łączność}}) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z \quad \text{oraz} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z;$$

(przemienność) $x \wedge y = y \wedge x$ oraz $x \vee y = y \vee x$;

(absorpcja) $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$.

Stwierdzenie 1.17. *Jeżeli $(X, \leq)$ jest kratą porządkową, to trójka $(X, \vee, \wedge)$ wraz z operacjami*

$$x \vee y := \sup\{x, y\}, \quad x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

tworzy kratę algebraiczną. Ponadto każda z operacji $\vee$ lub $\wedge$ determinuje porządek $\leq$, gdyż

$$\forall_{x, y \in X} \quad x \leq y \iff x \vee y = y \iff x \wedge y = x.$$

DOWÓD. Łączność operacji $\vee$ i $\wedge$ wynika ze Stwierdzenia 1.10 zastosowanego do zbioru $\{x, y, z\} = \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$. Natomiast przemienność zachodzi, ponieważ argumentami operacji supremum i infimum są zbiory. Zatem aby udowodnić, że układ $(X, \vee, \wedge)$ jest kratą, pozostaje pokazać aksjomat absorpcji. Nierówności w jedną stronę zachodzą z definicji supremum i infimum:

$$x \wedge (x \vee y) = \inf\{x, (x \vee y)\} \leq x \leq \sup\{x, (x \wedge y)\} = x \vee (x \wedge y).$$

W celu pokazania nierówności przeciwnej zauważmy, że x jest ograniczeniem dolnym elementów x i $x \vee y$, czyli ich największe ograniczenie dolne $x \wedge (x \vee y) \geq x$. Analogicznie korzystając otrzymujemy nierówność $x \geq x \vee (x \wedge y)$. Zatem trójka $(X, \vee, \wedge)$ jest kratą.

Zauważmy ponadto, że jeśli $x \leq y$, to najmniejszym ograniczeniem górnym elementów x i y jest y , a ich największym ograniczeniem dolnym x . Zatem $x \leq y$ jest równoważne, temu że $x \vee y = y$, jak i temu, że $x \wedge y = x$. $\square$

Stwierdzenie 1.18. *Jeżeli $(X, \vee, \wedge)$ jest kratą algebraiczną, to relacja*

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \vee y = y$$

jest porządkiem kratowym takim, że

$$\forall_{x, y \in X} \quad \sup\{x, y\} = x \vee y \quad \text{oraz} \quad \inf\{x, y\} = x \wedge y.$$

DOWÓD. Pokażemy, że relacja $\leq$ zdefiniowana przy pomocy operatora $\vee$ jest porządkiem. Niech $x, y, z \in X$. Zwrotność wynika z absorpcji $x \vee x = x \vee (x \vee (x \wedge y)) = (x \vee x) \vee (x \wedge y) = x \vee (x \wedge y) = x$. Z założenia, że $x \leq y$ i $y \leq z$, tzn. $x \vee y = y$ i $y \vee z = z$, mamy $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$, więc $x \leq z$, a zatem relacja $\leq$ jest przechodnia. Antysymetryczność otrzymujemy automatycznie z definicji relacji $\leq$. Mianowicie, jeśli $x \leq y$ oraz $y \leq x$ mamy to $x = y \vee x = x \vee y = y$.

Pokażemy, że $x \vee y$ jest supremum elementów $x, y \in X$. Dowód, że $x \wedge y$ jest infimum jest dualny (analogiczny). Zauważmy, że

$$x \wedge (x \vee y) = (x \wedge x) \vee y = x \wedge y \iff x \leq x \vee y$$

oraz

$$y \wedge (x \vee y) = (x \vee y) \wedge y = x \vee y \iff y \leq x \vee y.$$

Zatem $x \vee y$ jest ograniczeniem górnym elementów x i y . Niech $z \in X$ będzie ograniczeniem górnym elementów x i y . Wtedy $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z$, czyli $x \vee y \leq z$. To oznacza, że $x \vee y$ jest najmniejszym ograniczeniem górnym. $\square$

Skoro krata to zbiór z dwoma operacjami naturalne jest pytanie, czy te działania są rozdzielne względem siebie nawzajem. Łatwo dowieść, że każda krata jest *poddystybutywna* (*podrozdzielna*), tzn. dla każdych $x, y, z \in X$ w kratce X zachodzą nierówności

$$(x \wedge y) \vee z \leq (x \vee z) \wedge (y \vee z) \quad \text{oraz} \quad (x \vee y) \wedge z \leq (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

Na ogół jednak nierówności te nie są równościami.

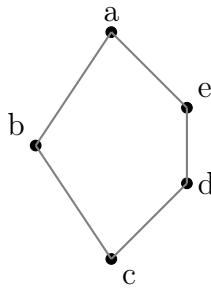
Definicja 1.19. Mówimy, że krata X jest *dystybutywna* (*rozdzielna*), jeżeli dla dowolnych $x, y, z \in X$ zachodzą równości

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \quad \text{oraz} \quad (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

Innymi słowy, $\wedge$ jest rozdzielne względem $\vee$ i vice versa.

Uwaga 1.20. Zgodnie z zasadą dualności można wykazać, że w każdej kratce rozdzielność $\wedge$ względem $\vee$ jest równoważna rozdzielności $\vee$ względem $\wedge$. Zatem w powyższej definicji wystarczy założyć zachodzenie jednej z równości.

Przykład 1.21 (Krata niedystybutywna). Rozważmy tak zwaną kratę N_5 , składającą się z pięciu elementów a, b, c, d, e , spełniających warunki: $c \leq x \leq a$, dla każdego $x \in N_5$; $b \wedge d = e \wedge b = c$ oraz $b \wedge d = e \wedge b = c$. Diagram Hassego tego porządku przedstawia się następująco:



W tej kratce $d \vee (b \wedge e) = d \vee c = d$ oraz $(d \vee b) \wedge (d \vee e) = a \wedge e = e$. Czyli

$$d \vee (b \wedge e) \neq (d \vee b) \wedge (d \vee e).$$

W późniejszej części pracy zajmiemy się kratami wektorowymi oraz kratami Banacha, które jak wykażemy są zawsze dystrybutywne.

1.2 Uporządkowane przestrzenie wektorowe

W całym tym podrozdziale X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Zatem elementy zbioru X są wektorami, które możemy dodawać oraz mnożyć przez skalar, tzn. określone są działania $X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ oraz $\mathbb{R} \times X \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in X$ spełniające standardowe aksjomaty rozdzielności, łączności, czy przemienności.

Definicja 1.22. *Uporządkowaną przestrzenią wektorową* nazywamy przestrzeń wektorową X wraz z porządkiem $\leq$ zgodnym ze strukturą liniową w następującym sensie: dla każdych $x, y, z \in X$ i $\alpha \geq 0$ mamy

(zgodność z dodawaniem) jeżeli $x \leq y$, to $x + z \leq y + z$ oraz

(zgodność z dodatnim skalowaniem) jeżeli $x \leq y$, to $\alpha x \leq \alpha y$.

Podane wcześniej Przykłady 1.3, 1.4 i 1.5 są podstawowymi modelami przestrzeni wektorowych uporządkowanych:

Przykład 1.23 (Przestrzenie funkcyjne). Na zbiorze $F(M)$ funkcji rzeczywistych $x : M \rightarrow \mathbb{R}$ strukturę liniową definiujemy punktowo, tzn.

$$(x + y)(t) := x(t) + y(t), \quad (\alpha x)(t) := \alpha x(t) \quad t \in M,$$

gdzie $x, y \in F(M)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Wraz z porządkiem zadany punktowo, jest to uporządkowana przestrzeń wektorowa. Oczywiście, każda podprzestrzeń liniowa przestrzeni $F(M)$ jest również przestrzenią tego typu. Na przykład, w zależności od struktury zadanej na M , możemy rozważać następujące podprzestrzenie:

- (1) *Przestrzeń funkcji ograniczonych* $B(M)$ jest podprzestrzenią liniową w $F(M)$.
- (2) Jeżeli M jest przestrzenią topologiczną, to *przestrzeń funkcji ciągłych* $C(M)$ jest podprzestrzenią liniową w $F(M)$.
- (3) Jeżeli (M, Σ, μ) jest przestrzenią z miarą, to *przestrzeń funkcji mierzalnych* $\mathcal{M}(M)$ jest podprzestrzenią $F(M)$.
- (4) Jeżeli $M = [a, b]$ jest przedziałem, to *przestrzeń funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły* $C^{(1)}[a, b]$ jest podprzestrzenią $F(M)$.

Przykład 1.24 (Przestrzenie ciągów). Jeżeli $M = \mathbb{N}$ to funkcje na M utożsamimy z ciągami i wtedy mamy następujące ważne podprzestrzenie liniowe przestrzeni $F(M)$:

$$\ell^\infty := \{x = (x(1), x(2), \dots) : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)| < \infty\} \quad (\text{przestrzeń ciągów ograniczonych})$$

$$c := \{x = (x(1), x(2), \dots) : \exists x(\infty) \in \mathbb{R} \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x(\infty)\} \quad (\text{przestrzeń ciągów zbieżnych})$$

$c_0 := \{x = (x(1), x(2), \dots) : \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0\}$ (przestrzeń ciągów zbieżnych do zera)

$c_{00} = \{x = (x(1), \dots, x(N), 0, 0, \dots) : N \in \mathbb{N}\}$ (przestrzeń ciągów skończonych).

Wszystkie te przestrzenie ze strukturą zadaną po współrzędnych są uporządkowanymi przestrzeniami wektorowymi.

Przykład 1.25 (Przestrzenie funkcji mierzalnych). Jeżeli (M, Σ, μ) jest przestrzenią z miarą, to omówiona w Przykładzie 1.6 przestrzeń funkcji mierzalnych $L_0(\mu)$ z porządkiem $\mu\text{-pw} \leq$ oraz z mnożeniem przez skalar i dodawaniem wektorów zdefiniowanymi punktowo jest uporządkowaną przestrzenią wektorową. Automatycznie również podprzestrzennie tej przestrzeni są uporządkowanymi przestrzeniami wektorowymi. Do najważniejszych należą

(1) *Przestrzenie funkcji całkowalnych w p -tej potęgze*

$$L^p(\mu) = \left\{ x \in L_0(\mu) : \int_M |x|^p d\mu < \infty \right\}, \quad p \in (0, \infty).$$

(2) *Przestrzeń funkcji istotnie ograniczonych*

$$L^\infty(\mu) = \{x \in L_0(\mu) : \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in M \setminus A} |x(t)| < \infty\}.$$

Aby przestrzeń wektorowa była uporządkowana wystarczy założyć dwa warunki zawarte w Definicji 1.22. Jednak można z nich wyprowadzić wiele innych przydatnych zależności opisujących tę strukturę.

Lemat 1.26. *W każdej uporządkowanej przestrzeni wektorowej $(X, \leq)$, dla dowolnych $x, y, z, v \in X$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą poniższe własności*

(1) *Jeśli $x \leq y$ i $z \leq v$, to $x + z \leq y + v$;*

(2) *Jeśli $x \leq y$ i $\alpha < 0$, to $\alpha x \geq \alpha y$;*

(3) *Jeśli $x \geq 0$ i $\alpha \leq \beta$, to $\alpha x \leq \beta x$.*

DOWÓD. 1) Z zachowania porządku, przy dodawaniu wektorów dostajemy

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z \quad \text{oraz} \quad z \leq v \implies z + y \leq v + y.$$

Zatem $x + z \leq y + v$ z przechodniości relacji $\leq$.

2) Z zachowania porządku przy dodatnim skalowaniu mamy $-\alpha x \leq -\alpha y$. Dodając do tej nierówności obustronnie wektor $\alpha x + \alpha y$, otrzymujemy $\alpha x \geq \alpha y$.

3) Z zachowania porządku przy dodatnim skalowaniu, mamy $(\beta - \alpha)x \geq 0$, zatem $\beta x - \alpha x \geq 0$. Dodając do tej nierówności obustronnie αx otrzymujemy $\beta x \geq \alpha x$. $\square$

Definicja 1.27. *Stożkiem* w przestrzeni wektorowej X nazywamy zbiór $S \subseteq X$ spełniający warunki

(zamkniętość na sumy) $S + S \subseteq S$;

(zamkniętość na dodatnie skalowanie) $\alpha S \subseteq S$, dla każdego $\alpha \geq 0$;

(zerowy przekrój) $S \cap (-S) = \{0\}$.

Okazuje się, że uporządkowane przestrzenie wektorowe są równoważne przestrzeniom wektorowym ze stożkiem. Wykażemy to w poniższych Stwierdzeniach 1.28, 1.30.

Stwierdzenie 1.28. *W uporządkowanej przestrzeni wektorowej $(X, \leq)$ zbiór*

$$X_+ := \{x \in X : x \geq 0\}$$

jest stożkiem. Ponadto determinuje on porządek, gdyż dla dowolnych $x, y \in X$ mamy

$$x \leq y \iff y - x \in X_+.$$

DOWÓD. Weźmy $x, y \in X_+$, to znaczy elementy $x, y \in X$ takie, że $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Dodając obustronnie do pierwszej nierówności element y , otrzymujemy $x + y \geq y \geq 0$. Zatem $x + y \in X_+$, z przechodniości $\leq$. Weźmy teraz dodatni skalar $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Ponieważ porządek jest zgodny z dodatnim skalowaniem, to $\alpha x \geq 0$, czyli $\alpha x \in X_+$. Następnie niech $x \in X_+ \cap (-X_+)$, czyli $x \geq 0$ i $-x \geq 0$. Po dodaniu obustronnie do drugiej nierówności wektora x dostajemy $x \leq 0$. Zatem $x \geq 0$ i $x \leq 0$, skąd $x = 0$. Pokazaliśmy, że X_+ jest stożkiem. Zauważmy dodatkowo, że $y - x \in X_+ \iff 0 \leq y - x \iff x \leq y$, co dowodzi drugiej części stwierdzenia. $\square$

Definicja 1.29. Stożek $X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ nazywamy *stożkiem dodatnim*, a jego elementy *wektorami dodatnimi* w kracie wektorowej X .

Stwierdzenie 1.30. *Jeżeli (X, S) jest przestrzenią wektorową, wraz z zadaniem na niej stożkiem $S \subseteq X$, to $(X, \leq)$ jest uporządkowaną przestrzenią wektorową przez relację $\leq$, zadaną formułą*

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff} y - x \in S.$$

Ponadto $S = X_+$ jest stożkiem wektorów dodatnich w przestrzeni $(X, \leq)$.

DOWÓD. W tym dowodzie $x, y, z \in X$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Najpierw pokażemy, że relacja $\leq$ zadaje porządek. Jest ona zwrotna, ponieważ $x - x = 0 \in S$. Niech $x \leq y$ i $y \leq z$, to znaczy $y - x, z - y \in S$, czyli $z - x = (z - y) + (y - x) \in S$ jako suma wektorów ze stożka S . Zatem relacja $\leq$ jest również przechodnia. Załóżmy, że $x \leq y$ i $y \leq x$, to znaczy że odpowiadające różnice są w stożku, $y - x, x - y \in S$. Jest to równoważne z tym, że $y - x \in S$ i $y - x \in (-S)$. Zatem z własności zerowych przekrojów w stożku $y - x = 0$, czyli $x = y$. Czyli relacja $\leq$ jest antysymetryczna.

Teraz pokażemy, że porządek $\leq$ jest zgodny ze strukturą wektorową przestrzeni X . Niech $x \leq y$, czyli $y - x \in S$. Stąd, skracając z , dostajemy $(y + z) - (x + z) \in S$. Zatem z definicji relacji $\leq$ otrzymujemy $x + z \leq y + z$. Czyli porządek jest zachowany przy dodawaniu wektorów. Niech teraz $x \leq y$, czyli $y - x \in S$. Korzystając z zamkniętości stożka na dodatnie skalowanie, dostajemy, że $\alpha(y - x) \in S$. Czyli innymi słowy $\alpha y - \alpha x \in S$, co z definicji porządku oznacza, że $\alpha x \leq \alpha y$. Więc dodatnie skalowanie wektorów z przestrzeni X zachowuje porządek.

Ponadto dowolny element $x \in S$ można przedstawić w postaci $x - 0 \in S$, która jest równoważna z dodatniością badanego elementu $x \geq 0$. Zatem S jest stożkiem wektorów dodatnich, czyli $S = X_+$. $\square$

Lemat 1.31. *W uporządkowanej przestrzeni wektorowej $(X, \leq)$, dla dowolnych $x, y, z \in X$, prawdziwe są następujące zdania:*

(1) *Jeśli istnieje $x \vee y$, to istnieją $(-x) \wedge (-y)$, $(x + z) \vee (y + z)$ oraz*

$$-(x \vee y) = (-x) \wedge (-y), \quad (x \vee y) + z = (x + z) \vee (y + z);$$

(2) *Jeśli istnieje $x \wedge y$, to istnieją $(-x) \vee (-y)$, $(x + z) \wedge (y + z)$ oraz*

$$-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y), \quad (x \wedge y) + z = (x + z) \wedge (y + z).$$

DOWÓD. (1). Korzystając z 2) z Lematu 1.26 przekształcamy nierówności $x, y \leq x \vee y$ na $-x, -y \geq -(x \vee y)$. Otrzymane nierówności oznaczają, że element $-(x \vee y)$ jest ograniczeniem dolnym $-x$ i $-y$. Niech $z \in X$ będzie ograniczeniem dolnym $-x$ i $-y$, czyli $(-x), (-y) \geq z$. Wtedy $x, y \leq -z$, więc ich supremum jest od niego mniejsze $x \vee y \leq -z$, czyli $-(x \vee y) \geq z$. Zatem $-(x \vee y)$ jest największym ograniczeniem dolnym elementów $-x$ i $-y$. Otrzymujemy więc, że $(-x) \wedge (-y)$ istnieje oraz $(-x) \wedge (-y) = -(x \vee y)$.

Z nierówności $x + z \leq x \vee y + z$ oraz $y + z \leq x \vee y + z$. A zatem elementy $x + z$ i $y + z$ są ograniczone z góry przez $x \vee y + z$. Niech $p \in X$ będzie ograniczeniem górnym $x + z$ i $y + z$, czyli $(x + z), (y + z) \leq p$. Wtedy $x, y \leq p - z$, zatem $p - z$ jest ograniczeniem górnym elementów x i y , więc ich supremum jest od niego mniejsze $x \vee y \leq p - z$. Otrzymaliśmy $(x \vee y) + z \leq p$, co oznacza, że $(x \vee y) + z$ jest najmniejszym ograniczeniem górnym elementów $x + z$ i $y + z$. Zatem $(x + z) \vee (y + z)$ istnieje i jest równe $(x + z) \vee (y + z) = (x \vee y) + z$.

(2). Dowód jest dualny (analogiczny), por. Uwaga 1.9. $\square$

1.3 Kraty Wektorowe

W tej sekcji zbadamy uporządkowane przestrzenie wektorowe, które dodatkowo są kratami.

Definicja 1.32. *Kratą wektorową (lub też przestrzenią Riesz) nazywamy uporządkowaną przestrzeń wektorową $(X, \leq)$, która jest kratą, to znaczy istnieją w niej $x \wedge y$ i $x \vee y$ dla dowolnej pary elementów $x, y \in X$.*

Przytoczone w poprzednich sekcjach Przykłady 1.3 -1.6 oraz 1.23-1.25, są kratami wektorowymi, z wyjątkiem przestrzeni funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły $C^{(1)}[a, b]$.

Przykład 1.33. Przestrzeń funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły $C^{(1)}[-1, 1]$ nie jest kratą. Weźmy na przykład funkcje $x, y \in C^{(1)}[-1, 1]$ określone wzorami $x(t) = t$, $y(t) = -t$. Wtedy ich supremum punktowe wynosi $(x \vee y)(t) = |t|$, ale wartość bezwzględna nie jest funkcją różniczkowalną w $x = 0$. Stąd wynika, że funkcje x i y nie posiadają supremum w przestrzeni $C^{(1)}[-1, 1]$.

Okazuje się, że aby sprawdzić, czy uporządkowana przestrzeń wektorowa jest kratą wektorową, nie trzeba sprawdzać istnienia supremum oraz infimum, dla dowolnych par jej elementów. Wystarczy dowieść, że istnieje jedna z tych operacji. A nawet można tylko pokazać, że istnieje infimum lub supremum dowolnego elementu z zerem.

Lemat 1.34. *W uporządkowanej przestrzeni wektorowej $(X, \leq)$ następujące warunki są równoważne*

- (1) $(X, \leq)$ jest kratą wektorową;
- (2) dla każdych dwóch wektorów $x, y \in X$ istnieje ich supremum $x \vee y$;
- (3) dla każdych dwóch wektorów $x, y \in X$ istnieje ich infimum $x \wedge y$;
- (4) dla każdego wektora $x \in X$ istnieje jego supremum z zerem $x \vee 0$;
- (5) dla każdego wektora $x \in X$ istnieje jego infimum z zerem $x \wedge 0$.

DOWÓD. (1) $\Rightarrow$ (2). Wynika to wprost z definicji kraty wektorowej.

(2) $\Rightarrow$ (3). Weźmy dowolne dwa wektory $x, y \in X$. Z założenia istnieje supremum $(-x) \vee (-y)$ wektorów przeciwnych $-x, -y \in X$. Zatem na mocy Lematu 1.31 istnieje infimum $x \wedge y = (-(-x)) \wedge (-(-y)) = -((-x) \vee (-y))$.

(3) $\Rightarrow$ (5). Zachodzi kładąc $y = 0$.

(5) $\Rightarrow$ (4). Weźmy dowolny element $x \in X$. Stosując Lematu 1.31 do wektora przeciwnego $-x \in X$ otrzymujemy, że istnieje $x \vee 0 = -((-x) \wedge 0)$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Niech $x, y \in X$. Z Lematu 1.31 otrzymujemy, że istnieje $x \vee y = (x - y) \vee 0 + y$ oraz $x \wedge y = (x - y) \vee 0 + y$. $\square$

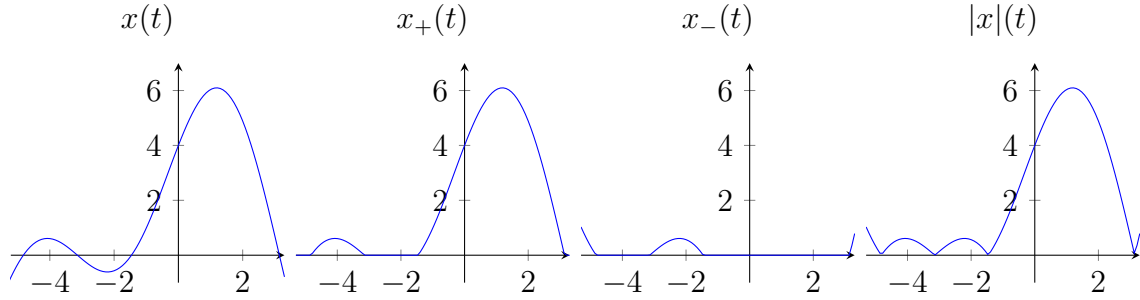
Definicja 1.35. Dla dowolnego elementu $x \in X$ kraty wektorowej $(X, \leq)$ przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$x_+ := x \vee 0, \quad x_- = (-x) \vee 0, \quad |x| := x \vee (-x).$$

Ponadto x_+ nazywamy *częścią dodatnią*, x_- *częścią ujemną*, a $|x|$ *wartością bezwzględną* (lub krócej *modułem*) wektora x . Dodatkowo powiemy, że dwa elementy kraty wektorowej $x, y \in X$ są *rozłączne* jeśli $|x| \wedge |y| = 0$. Piszemy wtedy $x \perp y$, czyli

$$x \perp y \stackrel{def}{\iff} |x| \wedge |y| = 0.$$

Przykład 1.36. W kracie wektorowej funkcji rzeczywistych $F(M)$ określonych na zbiorze M dla funkcji $x : M \rightarrow \mathbb{R}$ częścią dodatnią jest $x_+ = \max\{x, 0\}$, częścią ujemną $x_- = \max\{-x, 0\}$, a wartością bezwzględną $|x| = \max\{x, -x\}$. Dla przykładowej funkcji, wykresy odpowiednich funkcji otrzymanych za pomocą operacji kratowych wyglądają jak następuje



Zauważmy, że funkcja $|x|$ jest sumą nieujemnych funkcji x_+ i x_- , a x jest ich różnicą. Dodatkowo warunek $x_+ \wedge x_- = 0$ jest równoważny temu, że x_+ i x_- mają rozłączne nośniki. W szczególności rozkład funkcji $x = x_+ - x_-$ na różnicę części dodatniej i ujemnej jest kluczowym elementem konstrukcji całki Lebesgue'a.

Lemat 1.37. W kracie wektorowej $(X, \leq)$ dla dowolnych elementów $x, y, z \in X$ i dodatniego skalaru $\alpha \in \mathbb{R}_+$ zachodzą poniższe własności

(zasada włączeń i wyłączeń) $x + y = x \vee y + x \wedge y$;

(podaddytywność) dla $x, y, z \geq 0$ mamy $(x + y) \wedge z \leq x \wedge z + y \wedge z$;

(dodatnia rozdzielność) $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ oraz $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$.

DOWÓD. Pokażmy, że zachodzi odpowiednik zasady włączeń i wyłączeń. Do nierówności $x \wedge y \leq x$ oraz $x \wedge y \leq y$ dajemy odpowiednio wektory y i x . Otrzymujemy w ten sposób $x \wedge y + x \leq y + x$ oraz $x \wedge y + y \leq x + y$. Po odpowiednim przekształceniu tych nierówności otrzymujemy ograniczenie górne elementów $x, y \leq x + y - x \wedge y$. Zatem supremum tych elementów jest od niego nie większe. Czyli $x \vee y \leq x + y - x \wedge y$. Odpowiednie przekształcenie daje nam nierówność w lewą stronę $x + y \geq x \vee y + x \wedge y$. Poprzez rozumowanie dualne dostajemy nierówność w drugą stronę.

Dla dowolnych wektorów dodatnich x, y, z mamy $(y + z) \wedge z = z$ oraz $z \leq z + x \wedge z$. Stąd oraz z łączności infimum (Stwierdzenie 1.10) oraz wzoru na przesunięcie infimum (Lemat 1.31) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (x + y) \wedge z &= (x + y) \wedge ((y + z) \wedge z) = ((x + y) \wedge (y + z)) \wedge z = (y + x \wedge z) \wedge z \\ &\leq (y + x \wedge z) \wedge (z + x \wedge z) = x \wedge z + y \wedge z. \end{aligned}$$

Niech teraz znowu $x, y \in X$ będą dowolne. Nierówności $x, y \leq x \vee y$ przemnożmy przez $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Otrzymujemy w ten sposób $\alpha x, \alpha y \leq \alpha(x \vee y)$. Oznacza to, że element

$\alpha(x \vee y)$ jest ograniczeniem górnym elementów αx i αy , a zatem jest on większy od ich supremum $(\alpha x) \vee (\alpha y) \leq \alpha(x \vee y)$. Z drugiej strony gdy nierówności $\alpha x, \alpha y \leq (\alpha x) \vee (\alpha y)$ przemnożymy przez α^{-1} otrzymamy $x, y \leq \alpha^{-1}(\alpha x \vee \alpha y)$. Zatem element $\alpha^{-1}(\alpha x \vee \alpha y)$ jest ograniczeniem górnym x i y . Czyli ich supremum jest od niego nie większe $x \vee y \leq \alpha^{-1}(\alpha x \vee \alpha y)$. Pozostaje przemnożyć powstałą nierówność przez α , $\alpha(x \vee y) \leq \alpha x \vee \alpha y$. Drugie równanie otrzymujemy analogicznie poprzez rozumowanie dualne. Pokazaliśmy więc rozdzielną dodatniego skalowania. $\square$

Stwierdzenie 1.38 (Rozkład Jordana). *W kracie wektorowej $(X, \leq)$ dowolny element $x \in X$ i jego wartość bezwzględna można przedstawić formułami*

$$x = x_+ - x_-, \quad |x| = x_+ + x_-,$$

przy czym $x_+, x_- \geq 0$ oraz $x_+ \perp x_-$. Co więcej rozkład $x = x_+ - x_-$ jest jednoznaczny w następującym sensie: jeśli $x = u - v$ dla pewnych rozłącznych dodatnich wektorów $u, v \in X_+$, to $u = x_+$ i $v = x_-$.

DOWÓD. Z zasady włączeń i wyłączeń z Lematu 1.37 oraz z Lematu 1.31 otrzymujemy

$$x = x + 0 = x \vee 0 + x \wedge 0 = x \vee 0 - ((-x) \vee 0) = x_+ - x_-.$$

Wartość bezwzględną rozpisujemy z definicji, przesuwamy wydzielamy element $-x$ przed supremum korzystając z Lematu 1.31 oraz wyłączamy 2 z rozdzielną z Lematu 1.37, i na koniec korzystamy z definicji części dodatniej elementu x oraz wykazanej powyżej równości $x = x_+ - x_-$. W ten sposób mamy

$$|x| = x \vee (-x) = (2x \vee 0) - x = 2(x \vee 0) - x = 2x_+ - (x_+ - x_-) = x_+ + x_-.$$

Jednoznaczność rozkładu wynika z Lematu 1.31, gdyż jeśli $x = u - v$ dla pewnych rozłącznych dodatnich wektorów $u, v \in X_+$, to

$$u = u - 0 = u - |u| \wedge |v| = u - u \wedge v = u + (-u) \vee (-v) = 0 \vee (u - v) = 0 \vee x = x_+.$$

Zatem $x = x_+ - v$ oraz $x = x_+ - x_-$, skąd także $v = x_-$. $\square$

Operacja brania wartości bezwzględnej z wektora zachowuje się podobnie do wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej, więc jest to trafne rozszerzenie na dowolną kratę wektorową:

Lemat 1.39. *W dowolnej kracie wektorowej, dla dowolnych wektorów $x, y \in X$ i skalaru $\alpha \in \mathbb{R}$, operacja brania wartości bezwzględnej $|\cdot|$ posiada własności*

(niezdegenerowanie) $|x| = 0 \iff x = 0$,

(dodatnia jednorodność) $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$,

(nierówności trójkąta) $|x + y| \leq |x| + |y|$ oraz $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

DOWÓD. Niech $|x| = 0$. Wtedy $x_+ + x_- = 0$. Skoro $x_+, x_- \geq 0$, to wynika stąd, że $x_+ = x_- = 0$, a więc też $x = x_+ - x_- = 0$. Otrzymaliśmy warunek niezdegenerowania wartości bezwzględnej. Następnie pokażemy dodatnią jednorodność. Dla $\alpha \in \mathbb{R}_+$ mamy

$$\begin{aligned} \alpha x &= (\alpha x)_+ + (\alpha x)_- = (\alpha x) \vee 0 + (-\alpha x) \vee 0 \\ &= \begin{cases} \alpha(x \vee 0 + (-x) \vee 0), & \text{dla } \alpha \geq 0 \\ -\alpha((-x) \vee 0 + x \vee 0), & \text{dla } \alpha < 0 \end{cases} = |\alpha|(x_+ + x_-) = |\alpha||x|. \end{aligned}$$

Z definicji wartości bezwzględnej mamy $x, -x \leq |x|$ oraz $y, -y \leq |y|$. Zatem

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{oraz} \quad -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|.$$

Oznacza to, że $|x| + |y|$ jest ograniczeniem górnym elementów $x + y$ i $-(x + y)$, więc ich supremum jest od niego nie większe. Czyli

$$|x + y| = (x + y) \vee (-(x + y)) \leq |x| + |y|.$$

Z wykazanej nierówności trójkąt wynika również, odwrócona nierówność trójkąta. Rzeczywiście, skoro $|x - y| = (x - y) \vee (y - x) = |y - x|$, to stosując dwukrotnie nierówność trójkąta otrzymujemy

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \quad \text{oraz} \quad |y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|.$$

Po przekształceniu daje to $|x| - |y| \leq |x - y|$ oraz $|y| - |x| \leq |x - y|$. Czyli $||x| - |y|| \leq |x - y|$. $\square$

Uwaga 1.40. Części dodatnie i ujemne wektorów są zgodne z porządkiem, to znaczy $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_+ \leq y_+$ oraz $y_- \leq x_-$. Zauważmy, że jeśli $x \leq y$, to $x \vee 0 \leq y \vee 0$, a to oznacza że $x_+ \leq y_+$. Ady dowieść implikacji w drugą stronę zauważmy, że skoro $-x \geq -y$, to $x_- = (-x) \vee 0 \geq (-y) \vee 0 = y_-$, a więc $-x_- \leq -y_-$. Korzystając z nierówności $x_+ \leq y_+$ oraz $-x_- \leq -y_-$ otrzymujemy, że $x = x_+ - x_- \leq y_+ - y_- = y$.

Można wyprowadzić szereg własności opisujący zależności między operacjami brania wartości bezwzględnej oraz supremum i infimum.

Lemat 1.41. W kratce wektorowej $(X, \leq)$ dla dowolnych elementów $x, y, u, v \in X$ zachodzą własności

- (1) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$;
- (2) $|x - y| = |x \vee u - u \vee y| + |x \wedge u - u \wedge y|$;
- (3) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ oraz $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$;
- (4) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$;
- (5) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}||x + y| - |x - y||$;

DOWÓD. (1). Zauważmy, że z przesunięć i praw De Morgana z Lematu 1.37 mamy

$$y + (x - y)_+ = y + (x - y) \vee 0 = x \vee y$$

oraz

$$-y + (x - y)_- = -y + (y - x) \wedge 0 = (-x) \vee (-y) = -x \wedge y.$$

Dodając obustronnie te równości otrzymujemy $(x - y)_+ + (x - y)_- = x \vee y - x \wedge y$, a więc ze wzoru na moduł ze Stwierdzenia 1.38 mamy $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$.

(2). Korzystając z (1) oraz dystrybutywności ze Stwierdzenia 1.44 obliczamy

$$\begin{aligned} |x - y| &= x \vee y - x \wedge y = (x \vee y + z) - (x \wedge y + z) \\ &= (x \vee y) \vee z - (x \vee y) \wedge z - (x \wedge y) \vee z + (x \wedge y) \wedge z \\ &= (x \vee z) \vee (y \vee z) - (x \wedge z) \vee (y \wedge z) - (x \vee z) \wedge (y \vee z) + (x \wedge z) \wedge (y \wedge z) \\ &= |x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z|. \end{aligned}$$

(3). Ta własność wynika z dodania i odjęcia stronami równań

$$\begin{aligned} x + y + |x - y| &= 2(x \vee y), \\ x + y - |x - y| &= 2(x \wedge y), \end{aligned}$$

które wynikają z zasady włączeń i wyłączeń z Lematu 1.37 oraz z równania (1).

(4). Tę własność otrzymujemy z (3) i z Lematu 1.31, a mianowicie

$$\begin{aligned} |x| \vee |y| &= x \vee (-x) \vee y \vee (-y) = \frac{x - y + |x + y|}{2} \vee \frac{y - x + |x + y|}{2} \\ &= \frac{1}{2}|x + y| + \frac{1}{2}(x - y) \vee (y - x) \\ &= \frac{1}{2}|x + y| + \frac{1}{2}(x - y) \vee (-(x - y)) \\ &= \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|). \end{aligned}$$

(5). Stosując zasadę włączeń i wyłączeń z Lematu 1.37 oraz z (4) otrzymujemy

$$|x| \wedge |y| = |x| + |y| - |x| \vee |y| = |x| + |y| - \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|).$$

Podstawiając w powyższej równości $x = u + v$ oraz $y = u - v$ mamy

$$|x| \wedge |y| = |u + v| + |u - v| - \frac{1}{2}(|2u| + |2v|) = |u + v| + |u - v| - |u| - |v|.$$

Czyli z (4) oraz (3),

$$\begin{aligned} |x| \wedge |y| &= 2|u| \vee |v| - |u| - |v| = |u| + |v| + ||u| - |v|| - |u| - |v| = ||u| - |v|| \\ &= \left| \frac{x + y}{2} \right| - \left| \frac{x - y}{2} \right| = \frac{1}{2}||x + y| - |x - y||. \end{aligned}$$

□

Uwaga 1.42. Z własności (1), (2) z Lematu 1.41 wynikają nierówności

$$|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y| \quad \text{oraz} \quad |x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|.$$

Jeśli ograniczymy się do elementów rozłącznych kraty wektorowej część dowiedzionych wcześniej własności upraszcza się jeszcze bardziej.

Wniosek 1.43. *W kratce wektorowej $(X, \leq)$ dla dowolnych elementów rozłącznych $x, y \in X$ zachodzą poniższe własności*

- (1) $|x + y| = |x - y|$,
- (2) $|x| \vee |y| = |x| + |y|$,
- (3) $(x + y)_\pm = x_\pm + y_\pm$,
- (4) $|x + y| = |x| + |y|$.

DOWÓD. (1) Ta równość wynika z definicji elementów rozłącznych $|x| \wedge |y| = 0$ zastosowanej do (5) z Lematu 1.41.

(2) Tę równość otrzymujemy po zastosowaniu własności (1) z Lematu 1.37,

$$|x| \vee |y| = |x| + |y| - |x| \wedge |y| = |x| + |y|.$$

(3). Zauważmy, że $x + y = x_+ - x_- + y_+ - y_- = (x_+ + y_+) - (x_- + y_-)$, czyli suma wektorów x i y jest równa różnicy elementów dodatnich $(x_+ + y_+), (x_- + y_-) \in X_+$. Pokażemy, że wektory $(x_+ + y_+)$ oraz $(x_- + y_-)$ są rozłączne. Wtedy z jednoznaczności rozkładu Jordana (Stwierdzenie 1.38) otrzymamy $(x + y)_+ = x_+ + y_+$ oraz $(x + y)_- = x_- + y_-$. Aby wykazać rzeczoną rozłączność zauważmy, że

$$0 \leq y_+ \wedge x_- \leq (y_+ + y_-) \wedge (x_+ + x_-) = |y| \wedge |x| = 0$$

oraz

$$0 \leq x_+ \wedge y_- \leq (x_+ + x_-) \wedge (y_+ + y_-) = |x| \wedge |y| = 0,$$

a więc elementy $y_+ \wedge x_-$ oraz $x_+ \wedge y_-$ są zerowe. Z podaddytywności z Lematu 1.37 oraz z rozłączności części dodatniej i ujemnej dowolnego wektora mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_+ + y_+| \wedge |x_- + y_-| &= (x_+ + y_+) \wedge (x_- + y_-) \leq (x_+ + y_+) \wedge x_- + (x_+ + y_+) \wedge y_- \\ &\leq x_+ \wedge x_- + y_+ \wedge x_- + x_+ \wedge y_- + y_+ \wedge y_- = 0. \end{aligned}$$

Stąd $(x_+ + y_+) \perp (x_- + y_-)$, a zatem $(x + y)_+ = x_+ + y_+$ oraz $(x + y)_- = x_- + y_-$.

(4) Ta równość wynika bezpośrednio z (3), gdyż

$$|x + y| = (x + y)_+ + (x + y)_- = x_+ + y_+ + x_- + y_- = (x_+ + x_-) + (y_+ + y_-) = |x| + |y|.$$

□

Jak pokazaliśmy w Przykładzie 1.21 istnieją kraty niedystrybutywne, tzn. w których działania $\vee$ i $\wedge$ nie są rozdzielne względem siebie, patrz Definicja 1.19. Okazuje się, że kraty wektorowe są zawsze dystrybutywne. Działania te są rozdzielne nawet względem nieskończonych supremów i infimów, o ile one istnieją.

Stwierdzenie 1.44 (Dystrybutywność). *W kratce wektorowej $(X, \leq)$ dla dowolnego podzbioru $S \subseteq X$ oraz elementu $x \in X$ mamy*

(1) *jeśli $\inf S$ istnieje, to istnieje $\inf_{s \in S} \{x \vee s\}$ oraz*

$$x \vee \inf S = \inf_{s \in S} \{x \vee s\};$$

(2) *jeśli $\sup S$ istnieje, to istnieje $\sup_{s \in S} \{x \wedge s\}$ oraz*

$$x \wedge \sup S = \sup_{s \in S} \{x \wedge s\}.$$

W szczególności, dla dwuelementowego zbioru $S = \{y, z\}$ mamy

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \text{oraz} \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Czyli $(X, \leq)$ jest kratą dystrybutywną.

DOWÓD. Pokażemy (1). Dowód (2) jest analogiczny (dualny). Załóżmy, że $\inf S$ istnieje i weźmy dowolny $x \in X$. Dla każdego $s \in S$ mamy $x \vee \inf S \leq x \vee s$. Ponieważ $x \vee \inf S$ jest ograniczeniem dolnym elementów $x \vee s$ dla każdego $s \in S$, to

$$x \vee \inf S \leq \inf_{s \in S} \{x \vee s\},$$

o ile infimum po prawej stronie istnieje. Żeby wykazać istnienie tego infimum oraz nierówność przeciwną potrzebujemy pokazać, że jeżeli $z \leq x \vee s$ dla każdego $s \in S$, to $z \leq x \vee \inf S$. Niech zatem $z \in X$ będzie takie, że $z \leq x \vee s$ dla każdego $s \in S$. Niech $s \in S$. Korzystając z tego, że $s + x = x \wedge s + x \vee s$ (zasada włączeń i wyłączeń, Lemat 1.37) otrzymujemy

$$s = s \wedge x + s \vee x - x \geq s \wedge x + z - x \geq \inf S \wedge x + z - x.$$

Zatem biorąc infimum po $s \in S$ dostajemy $\inf S \geq \inf S \wedge x + z - x$, czyli po przekształceniu

$$z \leq \inf S + x - \inf S \wedge x$$

Zatem stosując zasadę włączeń i wyłączeń do $\inf S$ oraz x mamy $z \leq x \vee \inf S$, co należało dowieść. $\square$

Definicja 1.45. *Przedziałem porządkowym o początku $x \in X$ i końcu $y \in X$, w zbiorze uporządkowanym X , nazywamy zbiór $[x, y] := \{v \in X : x \leq v \leq y\}$.*

Stwierdzenie 1.46 (Rozkład Riesa). *W kratce wektorowej $(X, \leq)$, dla wektorów dodatnich $x, y \in X_+$ zachodzi $[0, x + y] = [0, x] + [0, y]$.*

DOWÓD. Załóżmy, że $z \in [0, x] + [0, y]$. Wtedy $z = z_1 + z_2$, gdzie $0 \leq z_1 \leq x$ oraz $0 \leq z_2 \leq y$. Zatem $0 \leq z = z_1 + z_2 \leq x + y$, a to oznacza, że $z \in [0, x + y]$. To dowodzi inkluzji $[0, x] + [0, y] \subseteq [0, x + y]$.

Inkluzja w przeciwną stronę jest ciekawsza. Załóżmy, że $z \in [0, x + y]$ i połóżmy $u := x \wedge z$ oraz $v := z - u$. Wtedy $z = u + v$ oraz $0 \leq u = x \wedge z \leq x$. Natomiast, korzystając z Lematu 1.31, mamy

$$0 \leq v = z - x \wedge z = z + (-x) \vee (-z) = (z - x) \vee 0 \leq (x + y - x) \vee 0 \leq y \vee 0 = y.$$

Zatem $u \in [0, x]$ i $v \in [0, y]$, a więc $z \in [0, x] + [0, y]$. $\square$

Wniosek 1.47 (Podaddytywność infimum). *W kratce wektorowej $(X, \leq)$, dla wektorów dodatnich $x, y, z \in X_+$ zachodzi $(x + y) \wedge z \leq x \wedge z + y \wedge z$.*

DOWÓD. Oznaczmy $w = (x + y) \wedge z$. Wtedy $0 \leq w \leq x + y$, więc e Stwierdzenia 1.46 $w = w_1 + w_2$ dla pewnych $0 \leq w_1 \leq x$ i $0 \leq w_2 \leq y$. Oczywiście mamy też $w_1 \leq w = (x + y) \wedge z \leq z$ oraz $w_2 \leq w = (x + y) \wedge z \leq z$. Zatem $w_1 \leq x \wedge z$ i $w_2 \leq y \wedge z$. Czyli ostatecznie $w = w_1 + w_2 \leq x \wedge z + y \wedge z$. $\square$

1.4 Ideały porządkowe

Niniejsza sekcja zawiera podstawowe informacje dotyczące ideałów porządkowych, niezbędne do dalszych rozważań. Bardziej szczegółowe omówienie tego zagadnienia można znaleźć na przykład w książkach [21], [23].

Definicja 1.48. Powiemy, że podzbiór $Y \subseteq X$ w kratce jest

- *podkratą wektorową* X , jeżeli $Y \subseteq X$ jest podprzestrzenią wektorową X zamkniętą na operacje kratowe, tzn. $x \vee y, x \wedge y \in Y$ dla dowolnych $x, y \in Y$;
- *solidnym podzbiorem* X , jeżeli z tego, że $|x| \leq |y|$ wynika, że $x \in Y$ dla dowolnych $x \in X, y \in Y$;
- *ideałem porządkowym* (lub krócej *ideałem*) X , jeżeli $Y \subseteq X$ jest solidną podprzestrzenią wektorową.

Przykład 1.49. W kratce wektorowej $\mathbb{R}^2$ z porządkiem po współrzędnych ideałem (porządkowym) jest prosta rzeczywista $I = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$.

Natomiast zbiór wszystkich ciągów zbieżnych c jest podkratą wektorową w zbiorze wszystkich ciągów ograniczonych ℓ^∞ , ale nie jest ideałem. Rzeczywiście weźmy ciągi $x = (1, -1, 1, -1, \dots) \in \ell^\infty$ i $y = (1, 1, 1, 1, \dots) \in c$. Wtedy oczywiście $(1, 1, \dots) = |x| \leq |y| = (1, 1, \dots)$, ale x nie jest ciągiem zbieżnym.

Definicja 1.50. *Ideałem generowanym przez niepusty zbiór $A \subseteq X$ nazywamy najmniejszy ideał zawierający ten zbiór i oznaczamy go przez I_A . Ideał generowany przez zbiór jednoelementowy $A = \{x_0\}$ nazywamy *ideałem głównym* generowanym przez $x_0 \in X$ i oznaczamy go przez I_{x_0} .*

Stwierdzenie 1.51. *Ideał generowany przez zbiór $A \subseteq X$ można przedstawić w postaci*

$$I_A = \{x \in X : |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| \text{ dla pewnych } \{x_i\}_{i=1}^n \subseteq A \text{ oraz } \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}_+\},$$

a ideał generowany przez element $x_0 \in X$ w postaci

$$I_{x_0} = \{x \in X : |x| \leq \lambda |x_0| \text{ dla pewnego } \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

DOWÓD. Wprowadźmy oznaczenie

$$P \stackrel{\text{ozn}}{=} \{x \in X : |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| \text{ dla pewnych } \{x_i\}_{i=1}^n \subseteq A \text{ oraz } \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}_+\}.$$

Aby udowodnić inkluzję $I_A \subseteq P$ wystarczy wykazać, że P jest ideałem zawierającym zbiór A . Ponieważ dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność $|x| \leq 1 \cdot |x|$, to $A \subseteq P$. Teraz udowodnimy, że P jest podprzestrzenią wektorową. Weźmy w tym celu dowolne $x, y \in P$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Z konstrukcji zbioru P wynika, że dla pewnych $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^m \subseteq A$ oraz $\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{\lambda'_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}_+$ zachodzą nierówności $|x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|$, $|y| \leq \sum_{j=1}^m \lambda'_j |y_j|$. Wprowadźmy dodatkowo nowe ciągi, poprzez oznaczenia

$$z_1 = x_1, \dots, z_n = x_n, \dots, z_{n+1} = y_1, \dots, z_{n+m} = y_m,$$

oraz

$$\lambda''_1 = |\alpha| \lambda_1, \dots, \lambda''_n = |\alpha| \lambda_n, \lambda''_{n+1} = |\beta| \lambda'_1, \dots, \lambda''_{n+m} = |\beta| \lambda'_m.$$

Wtedy zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} |\alpha x + \beta y| &\leq |\alpha x| + |\beta y| = |\alpha| \cdot |x| + |\beta| \cdot |y| \leq |\alpha| \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| + |\beta| \sum_{j=1}^m \lambda'_j |y_j| \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha| \lambda_i |x_i| + \sum_{j=1}^m |\beta| \lambda'_j |y_j| = \sum_{k=1}^{n+m} \lambda''_k |z_k|, \end{aligned}$$

z której wynika że liniowa kombinacja $\alpha x + \beta y \in P$. Pozostaje udowodnić, że zbiór P jest solidny w X . Weźmy więc dowolny element $w \in X$. Wtedy z tego że $|w| \leq |x|$ wynika nierówność $|w| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|$, która oznacza, że $w \in P$.

Inkluzję w drugą stronę $P \subseteq I_A$ wykażemy korzystając z solidności zbioru I_A . Mianowicie pokażemy, że dla każdego $x \in P$ zachodzi $|x| \leq |y|$, dla pewnego $y \in I_A$, czyli z solidności zbioru I_A będzie to oznaczało, że $x \in I_A$. Weźmy więc $x \in P$. Wtedy z konstrukcji zbioru P zachodzi nierówność $|x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|$ dla pewnych $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq A \subseteq I_A$

i $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}_+$. Dodatkowo z solidności I_A i z tego, że ten zbiór jest podprzestrzenią - kombinacją liniową modułów elementów z I_A jest również w tym zbiorze $\sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| \in I_A$. Otrzymujemy więc ostatecznie nierówność

$$|x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right|,$$

z której wynika, że $x \in I_A$.

Postać ideału generowanego przez element I_{x_0} wynika z przedstawienia ideału generowanego przez zbiór I_A . Wystarczy przyjąć zbiór jednoelementowy $A = \{x_0\}$. $\square$

Definicja 1.52. Niech $(X, \leq)$ będzie kratą wektorową. Element $e \in X_+$, który dla każdego $x \in X$ i dla pewnego dodatniego skalaru $\lambda > 0$ spełnia nierówność $|x| \leq \lambda e$ nazywamy *jedynką (porządkową)*.

Wniosek 1.53. Element dodatni $e \in X_+$ jest jedynką porządkową wtedy i tylko wtedy, gdy ideał główny generowany przez e jest całą przestrzenią, czyli gdy $I_e = X$.

W szczególności dowolny element dodatni $e \in X_+$ jest jedynką porządkową w ideale głównym I_e generowanym przez e .

DOWÓD. Ze Stwierdzenia 1.51 otrzymujemy, że dla wektora dodatniego $e \in X_+$

$$I_e = \{x \in X : |x| \leq \lambda e \text{ dla pewnego } \lambda \in \mathbb{R}_+\},$$

skąd natychmiast wynika teza. $\square$

Rozdział 2

Kraty Banacha

2.1 Przestrzenie Banacha

Zanim przejdziemy do omawiania krat Banacha przypomnimy najpierw podstawowe informacje na temat przestrzeni Banacha, znane ze standardowego kursu analizy funkcjonalnej. Dowody wielu twierdzeń będziemy pomijać. Czytelnika potrzebującego zgłębić dokładniej temat zapraszamy do lektury np. [17] i/lub [18].

Definicja 2.1. *Normą* przestrzeni wektorowej X jest funkcja rzeczywista $\|\cdot\| : X \ni x \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}_+$ spełniająca, dla każdego $x, y \in X$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, następujące warunki:

(niezdegenerowanie) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

(dodatnia jednorodność) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

(nierówność trójkąta) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Przestrzeń wektorową ze zdefiniowaną na niej normą nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Norma zadaje metrykę na X wzorem

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

W szczególności, przestrzenie unormowane wyposażone są w topologię, w tym pojęcie zbieżności. I tak na przykład, ciąg $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ jest *zbieżny* do $x \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Natomiast ciąg $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ jest *ciągą Cauchy*, gdy $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$.

Definicja 2.2. *Przestrzenią Banacha* nazywamy przestrzeń unormowaną zupełną, tzn. przestrzenią $(X, \|\cdot\|)$, w której każdy ciąg Cauchy jest zbieżny.

Uwaga 2.3. Podzbiór przestrzeni zupełnej jest przestrzenią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty. W tym sensie, zupełność jest synonimem domkniętości. Zatem każda domknięta podprzestrzeń liniowa przestrzeni Banacha jest przestrzenią Banacha. Natomiast każda podprzestrzeń liniowa niedomknięta, jest przykładem przestrzeni unormowanej niezupełnej.

Przestrzenie wektorowe z Przykładów 1.4, 1.23, 1.24, 1.25, poza kilkoma wyjątkami są przestrzeniami Banacha z naturalnymi normami. Omówmy to nieco dokładniej.

Przykład 2.4 (Przestrzenie skończenie wymiarowe). Każdą przestrzeń liniową n -wymiarową nad $\mathbb{R}$ można utożsamić z przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Na tej przestrzeni istnieje wiele różnych norm. Na przykład dla każdego $p \in [1, \infty)$ wzór

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

zadaje p -tą normę. W szczególności, dla $p = 2$ otrzymujemy tzw. *normę euklidesową*, czyli

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x(1)|^2 + |x(2)|^2 + \dots + |x(n)|^2}.$$

Można tu też określić normę $\|x\|_\infty := \sup_{k=1, \dots, n} |x(k)|$. Niemniej jednak, na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wszystkie normy są równoważne, co z topologicznego punktu widzenia oznacza, że nie jest ważne którą wybierzemy. W szczególności, *każda skończenie wymiarowa przestrzeń unormowana jest automatycznie przestrzenią Banacha*.

Przykład 2.5 (Przestrzenie funkcyjne). Na przestrzeni wszystkich funkcji $F(M)$ na zbiorze M nie istnieje naturalnie określona norma. Natomiast na podprzestrzeni $B(M)$ funkcji ograniczonych określona jest *norma supremum*

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in M} |x(t)|,$$

w której to $B(M)$ jest przestrzenią zupełną. Czyli $B(M)$ jest *przestrzenią Banacha*. Przypomnijmy tu ważny i znany fakt, że dla ciągu funkcji

zbieżność w normie supremum jest równoważna zbieżności jednostajnej.

Jeżeli M jest przestrzenią topologiczną, to możemy rozważać przestrzeń funkcji ciągłych $C(M) \subseteq F(M)$. Przy czym, na ogół na tej przestrzeni norma $\|\cdot\|_\infty$ jest nieskończona (funkcje ciągłe nie muszą być ograniczone). Natomiast *przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych* $C_b(M) = C(M) \cap B(M)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Banacha $B(M)$. Zatem $C_b(M)$ też jest przestrzenią Banacha. Jeżeli M jest zbiorem zwartym, wszystko się dobrze składa, ponieważ *na zbiorze zwartym funkcje ciągłe osiągają swoje kresy*, a więc są ograniczone. Czyli w tym przypadku $C(M) = C_b(M)$ jest przestrzenią Banacha z normą supremum.

Przykład 2.6. *Przestrzeń funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły $C^{(1)}[-1, 1]$ wraz z normą supremum nie jest przestrzenią Banacha. Rozważmy na przykład następujący ciąg funkcji*

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [-1, 0) \\ t^{1+\frac{1}{n}} & \text{dla } t \in [0, 1] \end{cases}.$$

Zauważmy, że każda z tych funkcji jest różniczkowalna w sposób ciągły. Zatem $\{x_n\}$ jest ciągiem elementów z przestrzeni $C^{(1)}[-1, 1]$. Ponadto ciąg ten jest zbieżny jednostajnie do funkcji

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [-1, 0) \\ t & \text{dla } t \in [0, 1] \end{cases},$$

która nie jest różniczkowalna. Zatem ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy w normie supremum, ale jego granica nie należy do $C^{(1)}[-1, 1]$. Czyli przestrzeń $C^{(1)}[-1, 1]$ nie jest zupełna w normie supremum. Można jednak pokazać, że przestrzeń ta jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|x\|_{(1)} = \sup_{t \in [-1, 1]} |x(t)| + \sup_{t \in [-1, 1]} |x'(t)|.$$

Przykład 2.7 (Przestrzeń ciągów). Naturalną normą na przestrzeniach ciągów jest *norma supremum*

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|;$$

Wraz z tą normą przestrzeniami Banacha są przestrzeń ciągów ograniczonych ℓ^{∞} , przestrzeń ciągów zbieżnych c oraz przestrzeń ciągów zbieżnych do zera c_0 . Takiej struktury nie posiada jednak *przestrzeń ciągów skończonych* c_{00} , która z normą supremum, czy *p-tą normą*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

jest przestrzenią unormowaną, jednak nie jest przestrzenią zupełną. Weźmy na przykład ciąg zdefiniowany wzorem $x_k = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots)$. Jest on ciągiem Cauchy'ego w obydwu normach, jednak dąży on do elementu $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$, który nie jest ciągiem skończonym.

Przykład 2.8 (Przestrzeń funkcji mierzalnych). Na przestrzeniach funkcji mierzalnych $\mathcal{M}(M)$ oraz $L_0(\mu)$ nie istnieją naturalnie określone normy, które byłyby skończone dla wszystkich elementów tych przestrzeni. Jednak podprzestrzenie $L^p(\mu)$, $p \in [1, +\infty)$, oraz $L^{\infty}(\mu)$ przestrzeni $L_0(\mu)$, wraz z *p-tą normą*

$$\|x\|_p = \left(\int_{\Omega} |x|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

oraz *normą supremum istotne*

$$\|x\| = \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in M \setminus A} |x(t)|,$$

odpowiednio, są przestrzeniami Banacha. Dodatkowo jeśli $M = \mathbb{N}$ i μ jest miarą liczącą, to możemy potraktować funkcje jak ciągi i wtedy całka względem μ jest sumą szeregu. Wówczas $L^p(\mu) = \ell^p = \{x = (x(1), x(2), \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n |x|^p < \infty\}$ staje się *przestrzenią ciągów całkowalnych w p-tej potędze* i wraz z *p-tą normą* jest przestrzenią Banacha. Tak samo jak $L^{\infty}(\mu) = \ell^{\infty}$ z normą supremum.

2.2 Kraty Banacha

W tym podrozdziale połączymy dwie omówione wcześniej struktury, czyli przestrzeni Banacha oraz kraty wektorowej.

Definicja 2.9. Normę $\|\cdot\|$ w kracie wektorowej $(X, \leq)$ nazywamy *normą kratową*, gdy jest kompatybilna z porządkiem, to znaczy dla każdych $x, y \in X$ spełniony jest warunek

$$|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|.$$

Mówimy wtedy, że para $(X, \|\cdot\|)$ jest *unormowaną kratą wektorową*. Unormowaną kratą wektorową zupełną w normie nazywamy *kratą Banacha*.

Uwaga 2.10. Wprost z powyższej definicji wynika, że dla normy kratowej, jeśli wartości bezwzględne dwóch wektorów $x, y \in X$ są sobie równe, to ich normy też. Czyli

$$|x| = |y| \implies \|x\| = \|y\|.$$

Norma z modułu wektora jest równa jego normie $\| |x| \| = \|x\|$ i dodatkowo norma zachowuje monotoniczność dodatnich wektorów, tzn. jeśli $0 \leq x \leq y$, to $\|x\| \leq \|y\|$.

Klasyczne przestrzenie Banacha z Przykładów 2.4, 2.5, 2.7, 2.8, czyli przestrzenie $L^p(\mu)$, dla $p \in [1, \infty]$, przestrzenie funkcji ciągłych i ograniczonych $C_b(M)$, oraz odpowiednie przestrzenie ciągów wraz z naturalnym porządkiem są kratami Banacha. Przestrzeń Banacha funkcji różniczkowalnych $C^{(1)}[a, b]$ nie jest kratą Banacha, ponieważ (z porządkiem zadany punktowo) nie jest kratą, patrz Przykład 1.33.

Stwierdzenie 2.11. W każdej unormowanej kracie wektorowej $(X, \|\cdot\|)$ prawdziwe są następujące zdania:

- (1) Operacje kratowe są ciągłe.
- (2) Stożek dodatni X_+ jest domknięty w normie.
- (3) Przedziały porządkowe $[x, y]$ dla każdego $x, y \in X$ są domknięte w normie.
- (4) X jest przestrzenią archimedesową, tzn. dla każdego $x \in X$

$$\exists y \in X \quad \forall n \geq 1 \quad nx \leq y \implies x \leq 0$$

(lub równoważnie: jeśli zbiór $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony z góry, to $x \leq 0$).

- (5) dla ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ zbieżnego w normie do $x \in X$:

- jeśli $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ rosnący, to $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$,
- jeśli $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ malejący, to $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$.

DOWÓD. (1). Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_m\}_{m \in \mathbb{N}} \in X$ będą ciągami zbieżnymi w normie odpowiednio do x i y . Wtedy korzystając z nierówności trójkąta i Uwagi 1.42 mamy

$$\begin{aligned} |x_n \vee y_m - x \vee y| &= |x_n \vee y_m - x_n \vee y + x_n \vee y - x \vee y| \\ &\leq |x_n \vee y_m - x_n \vee y| + |x_n \vee y - x \vee y| \\ &\leq |y_m - y| + |x_n - x|. \end{aligned}$$

Czyli

$$|x_n \vee y_m - x \vee y| \leq |y_m - y| + |x_n - x| = \left| |y_m - y| + |x_n - x| \right|.$$

Korzystając teraz z kompatybilności normy z porządkiem, z nierówności trójkąta dla normy oraz z Uwagi 2.10 otrzymujemy

$$\|x_n \vee y_m - x \vee y\| \leq \left\| |y_m - y| + |x_n - x| \right\| \leq \|y_m - y\| + \|x_n - x\|.$$

Ostatecznie, ponieważ $\|y_m - y\|$ oraz $\|x_n - x\|$ przy $n, m \rightarrow \infty$ dążą do 0, to granica $\|x_n \vee y_m - x \vee y\|$ przy $n, m \rightarrow \infty$ wynosi 0. Zatem funkcja $X \times X \ni (x, y) \rightarrow x \vee y \in X$ jest ciągła. Ciągłość funkcji $X \times X \ni (x, y) \rightarrow x \wedge y \in X$ dowodzi się analogicznie. Dodatkowo z ciągłości operacji $\vee$ wynika ciągłość funkcji $X \times X \ni (x, y) \rightarrow x_+ = x \vee 0 \in X$ oraz $X \times X \ni (x, y) \rightarrow x_- = (-x) \vee 0 \in X$, a z nich wynika ciągłość funkcji $X \times X \ni (x, y) \rightarrow |x| = x_+ + x_- \in X$.

(2). Skorzystamy z powszechnie znanego twierdzenia, mówiącego że przeciwobraz zbioru domkniętego przy odwzorowaniu ciągłym jest zbiorem domkniętym. Zauważmy, że element $x \in X$ jest dodatni $x \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_+ = x \vee 0 = x$, co jest równoważne temu, że jego część ujemna $x_- = 0$. Zbiór $X_+ = \{x \in X : x_- = 0\}$ jest domknięty, jako przeciwobraz zbioru domkniętego $\{0\}$ przy odwzorowaniu ciągłym $X \times X \ni (x, y) \rightarrow x_- \in X$.

(3). Zauważmy, że

$$[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\} = \{z \in X : z \geq x\} \cap \{z \in X : z \leq y\} = (x + X_+) \cap (y - X_+).$$

Zbiór $x + X_+$ jest domknięty jako przeciwobraz zbioru domkniętego $\{x\}$ przy odwzorowaniu ciągłym $X \times X \ni z \rightarrow x + z_- \in X$. Analogicznie domknięty jest zbiór $y - X_+$. Zatem domknięty jest przedział porządkowy $[x, y]$, jako przekrój zbiorów domkniętych.

(4). Niech $x, y \in X$ będą takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $nx \leq y$. Wtedy $\frac{1}{n}y - x \in X_+$. Zauważmy dodatkowo, że $\frac{1}{n}y - x$ dąży w normie, przy $n \rightarrow \infty$ do $-x$. Zatem z domkniętości X_+ mamy $-x \in X_+$, czyli $x \leq 0$.

(5). Dla $m \geq n$ mamy $x_m - x_n \in X_+$. Zauważmy, że $x_m - x_n$ przy $m \rightarrow \infty$ zbiega w normie do $x - x_n$, a więc z domkniętości X_+ , $x - x_n \in X_+$. Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq x$, czyli x jest ograniczeniem górnym ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Niech y będzie dowolnym ograniczeniem górnym ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $xn \leq y$. Czyli dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $y - x_n \in X_+$. Teraz skoro $y - x_n$ zbiega przy $n \rightarrow \infty$ w normie do $y - x$, to z domkniętości stożka dodatniego $y - x \in X_+$. Czyli $y \geq x$. A zatem $x = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Aby dowieść równości dla ciągu malejącego $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, przechodzimy do ciągu $\{-x_n\}_{n=1}^\infty$. Wtedy elementy $-x_n$ przy $n \rightarrow \infty$ zbiegają w normie do $-x$. Zatem z poprzedniego kroku $-x = \sup_{n \in \mathbb{N}} (-x_n)$, czyli z Lematu 1.31 i po pomnożeniu równania przez -1 otrzymujemy $x = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$. $\square$

2.3 Abstrakcyjne L^p -przestrzenie i M -przestrzenie

W niniejszej sekcji zajmiemy się jednymi z najważniejszych klas krat Banacha. Abstrakcyjne L^p -przestrzenie i M -przestrzenie, są szczególnie warte naszej uwagi, ponieważ łączą strukturę krat Banacha z klasycznymi przestrzeniami funkcyjnymi leżącymi u podstaw analizy funkcjonalnej. Naszym głównym celem będzie poznanie twierdzeń o reprezentacji abstrakcyjnych L^p -przestrzeni i M -przestrzeni, jako odpowiednich przestrzeni funkcyjnych. Twierdzenia te uproszczą nasze rozumowania w dalszej części pracy.

Definicja 2.12. Kratę Banacha X nazywamy (*abstrakcyjną*) L -przestrzenią jeśli jej norma spełnia warunek

$$x \wedge y = 0 \implies \|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Ogólniej dla $p \in [1, +\infty)$, kratę Banacha X nazywamy (*abstrakcyjną*) L^p -przestrzenią, jeżeli

$$x \wedge y = 0 \implies \|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p.$$

Uwaga 2.13. Przypomnijmy, iż wektory $x, y \in X$ są rozłączne, gdy $|x| \wedge |y| = 0$. Natomiast warunek $x \wedge y = 0$ oznacza dwie rzeczy: że wektory $x, y \in X_+$ są dodatnie oraz są one rozłączne. Czyli warunki na normę w powyższej definicji sprawdzamy tylko dla wektorów dodatnich i rozłącznych. Abstrakcyjne L -przestrzenie, czyli równoważnie abstrakcyjne L^1 -przestrzenie, były pierwotnie zdefiniowane przez Kakutaniego [12] za pomocą formalnie mocniejszego warunku. Mianowicie, Kakutani zakładał równość $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ dla dowolnych dodatnich wektorów $x, y \in X_+$. Bohnenblust [5] zdefiniował ogólne abstrakcyjne L^p -przestrzenie, za pomocą warunku $x \wedge y = 0$, który jest nie tylko formalnie słabszy, ale jest również bardziej naturalny z punktu widzenia teorii krat Banacha. Więcej o historii tych pojęć można znaleźć w [19].

Podstawowymi przykładami abstrakcyjnych L^p -przestrzeni są przestrzenie funkcji całkowalnych w p -tej potędze $L^p(\mu)$.

Przykład 2.14. Niech (M, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech $p \in [1, +\infty)$. Rozważmy przestrzeń $X = L^p(\mu)$ funkcji całkowalnych w p -tej potędze, która wraz z p -tą normą i porządkiem punktowym μ -prawie wszędzie tworzy kratę Banacha, patrz Przykłady 2.8 oraz 1.25. Wyjaśnimy najpierw, że rozłączność w tej przestrzeni oznacza rozłączność nośników funkcji. Mianowicie, przez *nośnik* funkcji $x \in L^p(\mu)$ rozumiemy zbiór

$$\text{supp}(x) := \{t \in M : x(t) \neq 0\},$$

który jest wyznaczony z dokładnością do zbiorów miary zero, gdyż w przestrzeni $L^p(\mu)$ utożsamiamy funkcje równe sobie μ -pw. Niech teraz $x, y \in L^p(\mu)$. Rozłączność tych wektorów $|x| \wedge |y| = 0$ jest równoważna temu, że $\min\{|x|, |y|\} \stackrel{\mu\text{-pw}}{=} 0$, a ten warunek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\text{supp } x \cap \text{supp } y) = 0$. Czyli

$$|x| \wedge |y| = 0 \iff \text{supp } x \cap \text{supp } y = \emptyset \text{ z dokładnością do zbiorów miary zero.}$$

Korzystając z tego i z powszechnie znanych własności całkowania, dla dowolnych rozłącznych funkcji $x, y \in L^p(\mu)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \int_M |x + y|^p d\mu = \int_{\text{supp } x \sqcup \text{supp } y} |x + y|^p d\mu \\ &= \int_{\text{supp } x} |x + y|^p d\mu + \int_{\text{supp } y} |x + y|^p d\mu \\ &= \int_{\text{supp } x} |x|^p d\mu + \int_{\text{supp } y} |y|^p d\mu = \int_M |x|^p d\mu + \int_M |y|^p d\mu \\ &= \|x\|_p^p + \|y\|_p^p. \end{aligned}$$

Czyli w kracie Banacha $L^p(\mu)$ dla dowolnych (nawet niekoniecznie dodatnich) wektorów rozłącznych $x, y \in L^p(\mu)$ spełniona jest równość $\|x + y\|_p^p = \|x\|_p^p + \|y\|_p^p$. Zatem jest to abstrakcyjna L^p -przestrzeń.

Okazuje się, że każdą abstrakcyjną L^p -przestrzeń można utożsamić z pewną konkretną przestrzenią $L^p(\mu)$. Poniższe twierdzenie ułatwi nam badanie abstrakcyjnych L^p -przestrzeni. Zamiast dowodzić tezy topologiczno-funkcjonalnie, co często nie jest proste, będziemy mogli pracować na funkcjach w kontekście konkretnych przestrzeni z miarą. W takiej sytuacji dostępny jest również szeroki zestaw znanych twierdzeń i metod dowodzenia.

Twierdzenie 2.15 (O reprezentacji abstrakcyjnych L^p -przestrzeni). *Krata Banacha X jest abstrakcyjną L^p -przestrzenią dla pewnego $p \in [1, +\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest izometrycznie i kratowo izomorficzna z konkretną przestrzenią $L^p(\mu)$ dla pewnej miary μ .*

Dowód tego twierdzenia znajduje się na przykład w książkach [19] i [2]. Jako pojęcie dualne do abstrakcyjnych L -przestrzeni Kakutani w [13] wprowadził pojęcie abstrakcyjnych M -przestrzeni.

Definicja 2.16. Kratę Banacha X nazywamy (abstrakcyjną) M -przestrzenią jeśli spełnia warunek $\|x + y\| = \|x\| \vee \|y\|$ dla dowolnej pary wektorów spełniających $x \wedge y = 0$.

Uwaga 2.17. Kakutani pierwotnie zdefiniował abstrakcyjne M -przestrzenie za pomocą warunku $\|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\|$ dla dowolnych $x, y \in X_+$. Warunek ten jest formalnie mocniejszy, niż ten którego użyliśmy powyżej, gdyż jeżeli założymy, że $x \wedge y = 0$ i skorzystamy z zasady włączeń i wyłączeń, patrz Lemat 1.37, to otrzymamy

$$\|x + y\| = \|x \vee y + x \wedge y\| = \|x \vee y\|.$$

Można jednak pokazać, że oba warunki są równoważne, patrz np. [19, Strona 22]. Zastosowanie słabszego warunku w Definicji 2.16 jest podyktowane m.in. tym, że łatwiej go sprawdzić w praktyce.

Tak jak podstawowym przykładem abstrakcyjnej L^p -przestrzeni była konkretna przestrzeń $L^p(\mu)$, tak modelowym przykładem abstrakcyjnej M -przestrzeni jest przestrzeń funkcji ciągłych $C(M)$ na zbiorze zwartym M .

Przykład 2.18. Przestrzeń funkcji ciągłych $X = C(M)$ na zbiorze zwartym M jest kratą Banacha ze strukturą kratową zadaną punktowo i normą supremum. Podobnie jak w Przykładzie 2.14 rozłączność dwóch funkcji w tej przestrzeni $x, y \in C(M)$ oznacza rozłączność ich nośników (i to w sensie dosłownym, a nie z dokładnością do zbioru miary zero). Mianowicie

$$|x| \wedge |y| = 0 \iff \text{supp } x \cap \text{supp } y = \emptyset.$$

Zatem jeśli $x, y \in C(M)$ są rozłączone, to

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \sup_{t \in M} |x(t) + y(t)| = \max_{t \in M} |x(t) + y(t)| = \max_{t \in \text{supp } x \sqcup \text{supp } y} |x(t) + y(t)| \\ &= \max \left\{ \max_{t \in \text{supp } x} |x(t)|, \max_{t \in \text{supp } y} |y(t)| \right\} = \max \{ \|x\|_\infty, \|y\|_\infty \} \\ &= \|x\|_\infty \vee \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

Czyli $C(M)$ jest M -przestrzenią. Zauważmy również, że dla kraty $C(M)$ funkcja stała równa jeden jest naturalną jedyneką porządkową. Ogólnie, patrz Definicja 1.52, funkcja nieujemna $e \in C(M)_+$ jest jedyneką porządkową, jeżeli dla każdego $x \in C(M)$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $|x|(t) \leq ne(t)$, dla każdego $t \in M$. Zatem jedyneką w kracie $C(M)$ jest każda ściśle dodatnia funkcja ciągła. W przestrzeni $C(M)$ istnieje wiele takich funkcji. Jednak najczęściej jako jedynekę przyjmuje się funkcję $e \equiv 1$.

Przykład 2.19. Niech (M, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą. Rozważmy kratę Banacha $X = L^\infty(\mu)$ z porządkiem zadanym punktowo μ -pw. oraz z normą daną przez supremum istotne. Weźmy dwie rozłączne funkcje istotnie ograniczone $x, y \in L^\infty(\mu)$. Jak wyjaśniliśmy w Przykładzie 2.14, wtedy przekrój $\text{supp } x \cap \text{supp } y$ ma miarę zero. Zatem

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in M \setminus A} |x(t) + y(t)| = \inf_{\substack{\mu(A)=0 \\ \text{supp } x \cap \text{supp } y \subseteq A}} \sup_{t \in M \setminus A} |x(t) + y(t)| \\ &= \max \left\{ \inf_{\substack{\mu(A)=0 \\ \text{supp } x \subseteq A}} \sup_{t \in M \setminus A} |x(t)|, \inf_{\substack{\mu(A)=0 \\ \text{supp } y \subseteq A}} \sup_{t \in M \setminus A} |y(t)| \right\} \\ &= \max \left\{ \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in M \setminus A} |x(t)|, \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in M \setminus A} |y(t)| \right\} \\ &= \max \{ \|x\|_\infty, \|y\|_\infty \} = \|x\|_\infty \vee \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

Czyli Krata Banacha $L^\infty(\mu)$ jest abstrakcyjną M -przestrzenią. I podobnie jak w Przykładzie 2.18 funkcja dodatnia $e \in L^\infty(\mu)_+$ jest jedyneką w kracie $L^\infty(\mu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e \stackrel{\mu\text{-}pw}{>} 0$. W szczególności funkcja tożsamościowo równa 1 jest naturalną jedyneką w tej przestrzeni.

Dla dowolnej abstrakcyjnej M -przestrzeni X , podobnie jak dla abstrakcyjnej L^p -przestrzeni, również istnieje "konkretny" reprezentant. Jest nim przestrzeń $C(M)$ z tym, że aby z X skonstruować zwartą przestrzeń M , potrzebujemy rozważać przestrzenie z jedyneką.

Twierdzenie 2.20 (O reprezentacji abstrakcyjnych M -przestrzeni). *Krata Banacha X jest abstrakcyjną M -przestrzenią z jedyneką wtedy i tylko wtedy, gdy X jest izometrycznie i kratowo izomorficzna z przestrzenią $C(M)$ dla pewnego zwartego zbioru M .*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć na przykład w książkach [19] i [2].

Uwaga 2.21. Niech $X = C(M)$ oraz $e \equiv 1$. W Przykładzie 2.18 pokazaliśmy, że e jest jedyneką w $C(M)$. Więc dla każdego $x \in C(M)$ i dla pewnego $\lambda > 0$ zachodzi $|x| \leq \lambda e$. Czyli dla każdego $t \in M$ mamy $|x(t)| \leq \lambda$, a to oznacza, że $\max_{t \in M} |x(t)| \leq \lambda$. Biorąc teraz infimum po λ otrzymujemy wzór

$$\max_{t \in M} |x(t)| = \inf_{\substack{|x| \leq \lambda e \\ \lambda > 0}} \lambda,$$

który wyraża normę supremum $\|x\|_\infty$ w języku krat wektorowych.

Okazuje się, że wzór z powyższej uwagi zadaje normę na każdym ideale głównym generowanym przez dowolny dodatni element $e \in X_+$ w dowolnej kratce Banacha X . Pozwala nam to (przynajmniej) "lokalnie" patrzeć na kraty Banacha jako na M -przestrzenie, co częstokroć jest bardzo użyteczne.

Twierdzenie 2.22. *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie kratą Banacha oraz niech $e \in X_+$. Wtedy ideał główny $I_e = \{x \in X : |x| \leq \lambda e \text{ dla pewnego } \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ z normą określoną wzorem*

$$\|x\|_e := \inf_{\substack{|x| \leq \lambda e \\ \lambda > 0}} \lambda \tag{2.1}$$

jest M -przestrzenią z jedyneką e .

DOWÓD. Postać ideału I_e oraz to że e jest w nim jedyneką wynika z Wniosku 1.53.

Pokażemy teraz, że formuła (2.1) zadaje normę na I_e . Przyjmijmy, że $\|x\|_e = 0$. Wtedy dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}_+$ zachodzi $|x| \leq \lambda e$. Ta nierówność jest możliwa tylko dla elementów, których wartość bezwzględna wynosi $|x| = 0$, czyli dla $x = 0$. Otrzymaliśmy więc warunek niezdegenerowania. Dodatnia jednorodność wynika z prostych przekształceń

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_e &= \inf\{\lambda > 0 : |\alpha x| \leq \lambda e\} = \inf\{\lambda > 0 : |\alpha||x| \leq \lambda e\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : |x| \leq \frac{\lambda}{|\alpha|} e\} = |\alpha| \inf\{\frac{\lambda}{|\alpha|} > 0 : |x| \leq \frac{\lambda}{|\alpha|} e\} \\ &= |\alpha| \|x\|_e. \end{aligned}$$

Dla dowolnych $\lambda_1 \geq \|x\|_e$ oraz $\lambda_2 \geq \|y\|_e$ zachodzą nierówności $-\lambda_1 e \leq x \leq \lambda_1 e$ oraz $-\lambda_2 e \leq y \leq \lambda_2 e$, z których wynika, że $-(\lambda_1 + \lambda_2)e \leq x + y \leq (\lambda_1 + \lambda_2)e$. Zatem

$$\inf\{\lambda > 0 : |x + y| \leq \lambda e\} \leq \lambda_1 + \lambda_2 \text{ dla wszystkich } \lambda_1 \geq \|x\|_e \text{ i } \lambda_2 \geq \|y\|_e.$$

Stąd otrzymujemy $\|x + y\|_e \leq \|x\|_e + \|y\|_e$. W ten sposób wykazaliśmy nierówność trójkąta.

W celu udowodnienia kratowości normy $\|\cdot\|_e$ przyjmijmy, że zachodzi nierówność $|x| \leq |y|$ oraz dla pewnego $\lambda > 0$, $|y| \leq \lambda e$. Wynika stąd, że $|x| \leq |y| \leq \lambda e$. Zatem

$$\inf_{\substack{|x| \leq \lambda e \\ \lambda > 0}} \lambda \leq \inf_{\substack{|y| \leq \lambda e \\ \lambda > 0}} \lambda,$$

a to oznacza dokładnie, że $\|x\|_e \leq \|y\|_e$.

Następnie dowiedzimy zupełności normy $\|\cdot\|_e$ w ideale głównym I_e . Niech $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq I_e$ będzie ciągiem Cauchy'ego w normie $\|\cdot\|_e$. Wtedy nierówność $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$ jest równoważna temu, że $|x_n - x_m| \leq \varepsilon e$. Zatem z kratowości normy $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \|e\|$, czyli $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ jest również ciągiem Cauchy'ego w normie $\|\cdot\|$. Teraz skoro przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ jest zupełna, to istnieje element $x \in X$ taki, że $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Jest to kandydat na granicę w normie $\|\cdot\|_e$. Przechodząc do podciągu możemy założyć, że $\|x_{n+1} - x_n\|_e \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, czyli

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e.$$

Stąd i z tego, że $\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^i \leq 1$ mamy

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &= \left| \sum_{i=1}^k x_{n+i} - x_{n+i-1} \right| \leq \sum_{i=1}^k |x_{n+i} - x_{n+i-1}| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n+i} e = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^i e \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n e. \end{aligned}$$

Przechodząc z k do nieskończoności i korzystając z ciągłości modułu otrzymujemy

$$|x - x_n| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n+k} - x_n \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n+k} - x_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n e.$$

Więc $\|x - x_n\|_e \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, czyli x jest granicą ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ w normie $\|\cdot\|_e$. Przy czym

$$|x| \leq |x - x_n| + |x_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n e + \|x\|_e \cdot e < (1 + \|x_n\|) e.$$

Zatem $x \in I_e$.

Pozostaje dowieść, że krata Banacha $(I_e, \|\cdot\|_e)$ spełnia warunek M-przestrzeni. Weźmy w tym celu $0 \leq x, y \in I_e$ i bez straty ogólności założmy, że $\|x\|_e \leq \|y\|_e$. Przyjmijmy dodatkowo, że $\|y\|_e < c$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}_+$. Wtedy $x, y \leq ce$, czyli $0 \leq x \vee y \leq ce$. Zatem $\|x \vee y\|_e \leq c$ dla każdego $c > \|y\|_e$. Otrzymujemy więc $\|x \vee y\|_e = \|x\|_e \vee \|y\|_e$. Z drugiej strony z tego, że norma $\|\cdot\|_e$ jest kratowa i $x, y \leq x \vee y$ mamy $\|x\|_e, \|y\|_e \leq \|x \vee y\|_e$, więc $\|x\|_e \vee \|y\|_e \leq \|x \vee y\|_e$. Otrzymaliśmy zatem to co chcieliśmy $\|x\|_e \vee \|y\|_e = \|x \vee y\|_e$. $\square$

Uwaga 2.23. Wprost z definicji $\|\cdot\|_e$, mamy $|x| \leq \|x\|_e \cdot e$. Zatem z kratowości normy zachodzi nierówność $\|\cdot\|, \|x\| \leq \| \|x\|_e \cdot e \| = \|x\|_e \cdot \|e\|$. Oznacza to, że norma $\|\cdot\|_e$ jest mocniejsza od normy $\|\cdot\|$. Innymi słowy z tego, że ciąg jest zbieżny w normie $\|\cdot\|_e$ wynika, że jest też zbieżny w normie $\|\cdot\|$.

Przykład 2.24. Niech (M, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą skończoną. Rozważmy osadzoną na niej kratę Banacha $L^p(\mu)$, dla pewnego $p \in [1, \infty)$ oraz funkcję $e \stackrel{\mu-pw}{=} 1$. Założenie, że miara μ jest skończona jest równoważne temu, że funkcja e należy do przestrzeni $L^p(\mu)$. Idealem generowanym przez ten element (idealem głównym) jest przestrzeń funkcji istotnie ograniczonych

$$\begin{aligned} I_e &= \{x \in L^p(\mu) : |x| \leq \lambda e \text{ dla pewnego } \lambda \in \mathbb{R}_+\} \\ &= \left\{x \in L^p(\mu) : |x| \stackrel{\mu-pw}{\leq} \lambda \text{ dla pewnego } \lambda \in \mathbb{R}_+\right\} = L^\infty(\mu), \end{aligned}$$

a określona na nim norma, to norma supremum istotne

$$\|x\|_e = \inf_{\substack{|x| \stackrel{\mu-pw}{\leq} \lambda e \\ \lambda > 0}} \lambda = \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in M \setminus A} |x| = \|x\|_\infty.$$

Norma supremum istotne jest mocniejsza od p -tej normy, ponieważ zbieżność w normie supremum istotne jest równoważna zbieżności jednostajnej poza zbiorem miary zero. Natomiast dla ciągu zbieżnego jednostajnie można z granicą wejść pod całkę. Czyli taki ciąg będzie też zbieżny w p -tej normie. Implikacja w drugą stronę nie zachodzi. Typowym przykładem jest tu tzw. wędrujący garb. Ponadto zazwyczaj $L^\infty(\mu) \subsetneq L^p(\mu)$. Rzeczywiście na przykład przyjmijmy $M = [0, 1]$, μ - jako miarę Lebesgue'a i $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$. Wtedy

$$\|x\|_p^p = \int_0^1 |x(t)|^p dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{2p}} dt = \left[\frac{1}{1-2p} t^{1-2p} \right]_0^1 = \frac{1}{1-2p} < \infty,$$

czyli $x \in L^p[0, 1]$. Ale x na każdym otoczeniu zera jest nieograniczone, a zatem $\|x\|_\infty = \infty$, więc też $x \notin L^\infty[0, 1]$.

2.4 Zespolone kraty Banacha

Do tej pory rozważaliśmy wyłącznie przestrzeni rzeczywiste. Jednakże często konieczne jest rozważanie przestrzeni nad ciałem liczb zespolonych. Dotyczy to na przykład teorii spektralnej, gdzie teoria funkcji holomorficznych, w tym m.in. algebraiczna zupełność ciała liczb zespolonych pełnią kluczową rolę.

W niniejszej sekcji omówimy jak rozszerzyć pojęcie rzeczywistych krat wektorowych oraz rzeczywistych krat Banacha na przypadek zespolony. Okazuje się to zadaniem nie dokońca trywialnym. Niemniej jednak sama idea rozszerzenia jest prosta i podobna do rozszerzenia ciała liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ do ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

Definicja 2.25. Kompleksyfikacją rzeczywistej przestrzeni wektorowej X nazywamy zespoloną przestrzeń wektorową $X_{\mathbb{C}} = X \times X$, z elementami i strukturą zadanymi analogicznie, jak w ciele liczb zespolonych. To znaczy, parę $(x, y) \in X_{\mathbb{C}}$ zapisujemy $x + iy$, a dodawanie i mnożenie przez skalar wektorów definiujemy wzorami

$$x + iy + u + iv = x + u + i(y + v) \quad \text{oraz} \quad (\alpha + i\beta) \cdot (x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)$$

dla dowolnych $x, y, u, v \in X$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Piszemy wtedy również $X_{\mathbb{C}} = X + iX$.

Przykład 2.26. Kompleksyfikacją przestrzeni funkcji rzeczywistych $F(M)$ jest przestrzeń funkcji zespolonych $F(M)_{\mathbb{C}} = F(M) + iF(M) = \{z : M \rightarrow \mathbb{C}\}$.

Na kompleksyfikacji rzeczywistej kraty wektorowej X wprowadzamy porządek przy pomocy stożka dodatniego X_+ , w sposób analogiczny do Stwierdzenia 1.30. Ta definicja ma tę zaletę, że nie zmienia stożka. Natomiast ma tę wadę, że tak otrzymany porządek nie jest kratowy sensu stricto.

Definicja 2.27. Niech X będzie kratą wektorową, ze stożkiem dodatnim X_+ . Na $X_{\mathbb{C}} = X + iX$ definiujemy częściowy porządek zadany przez X_+ , tzn.

$$\begin{aligned} x + iy \leq u + iv &\iff (u + iv) - (x + iy) \in X_+ \\ &\iff u - x \in X_+ \text{ oraz } iv - iy = 0 \\ &\iff x \leq u \text{ oraz } y = v, \end{aligned}$$

dla dowolnych $x + iy, u + iv \in X_{\mathbb{C}}$. Parę $(X_{\mathbb{C}}, \leq)$ nazywamy *zespoloną kratą wektorową*.

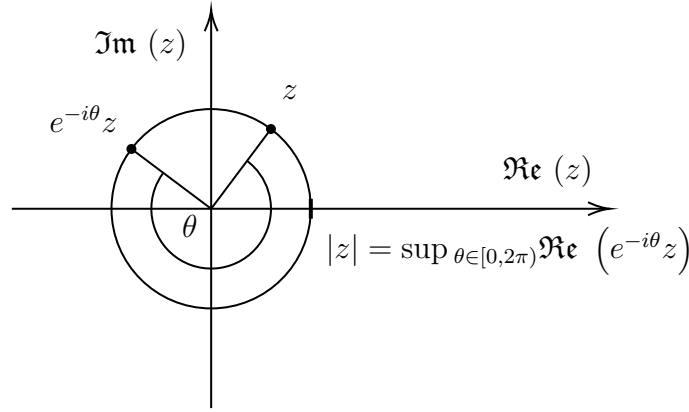
Uwaga 2.28. Wprowadzony powyżej porządek na $X_{\mathbb{C}}$ nie jest kratowy. Na przykład, w zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$, czyli kompleksyfikacji przestrzeni rzeczywistej $\mathbb{R}$ z naturalnym porządkiem nie istnieje $0 \vee i$. Większe od 0 są liczby rzeczywiste z przedziału $(0, +\infty)$, natomiast większe od i są takie liczby $z \in \mathbb{C}$, których część rzeczywista jest z tego przedziału $\Re(z) \in (0, +\infty)$, a część urojona wynosi dokładnie i . Te zbiory są rozłączne, czyli nie istnieje najmniejsze ograniczenie górne liczb 0 oraz i .

Mimo, iż porządek w zespolonej kratce wektorowej nie jest kratowy, to pozwala on (przy niezbyt mocnych założeniach, które automatycznie są spełnione w kratkach Banacha) zdefiniować moduł elementu $z \in X_{\mathbb{C}}$, to znaczy wektor z pierwotnej przestrzeni $|z| \in X_+ \subseteq X$, na której mamy już zadany porządek kratowy. Moduł jest ważną częścią struktury zespolonej kraty wektorowej (chyba jeszcze ważniejszą, niż w przypadku rzeczywistym). W szczególności, moduł pozwoli nam zdefiniować normę na $X_{\mathbb{C}}$ w przypadku, gdy X jest (rzeczywistą) kratą Banacha.

Zanim zdefiniujemy moduł na $X_{\mathbb{C}}$ rozważmy moduł liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$. Zauważmy, że można go wyrazić wzorem:

$$|z| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \Re(e^{-i\theta} z),$$

którego interpretację przedstawia obrazek poniżej.



Z tej formuły otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |z| &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \operatorname{Re}(e^{-i\theta}z) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \operatorname{Re}((\cos \theta - i \sin \theta)(\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z))) \\
 &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \operatorname{Re}(\operatorname{Re}(z) \cos \theta + \operatorname{Im}(z) \sin \theta + i(\operatorname{Im}(z) \cos \theta - \operatorname{Re}(z) \sin \theta)) \\
 &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} (\operatorname{Re}(z) \cos \theta + \operatorname{Im}(z) \sin \theta).
 \end{aligned}$$

Finalnie uzyskaliśmy wzór

$$|z| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} (\operatorname{Re}(z) \cos \theta + \operatorname{Im}(z) \sin \theta). \quad (2.2)$$

Otrzymaną formułą zdefiniujemy moduł na wektorach kraty Banacha.

Stwierdzenie 2.29. Dla dowolnej kraty Banacha X oraz dla dowolnego $x + iy \in X_{\mathbb{C}}$, $\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} (x \cos \theta + y \sin \theta)$ istnieje w X .

DOWÓD. Rozważmy ideał główny generowany I_e przez element $e := |x| + |y| \geq 0$. Wtedy $x, y \in I_e$ oraz na mocy Twierdzenia 2.22 ideał I_e jest M -przestrzenią. Korzystając z Twierdzenia 2.20 o reprezentacji M -przestrzeni można go utożsamić z przestrzenią $C(M)$. W przestrzeni $C(M)$ rozważane supremum zawsze istnieje. Mianowicie, korzystając ze wzoru (2.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \left[\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] (t) &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} (x(t) \cos \theta + y(t) \sin \theta) \\
 &\stackrel{(2.2)}{=} |x(t) + y(t)| = |x + iy|(t).
 \end{aligned}$$

□

Definicja 2.30. Niech X będzie kratą Banacha. Modułem wektora $x + iy \in X_{\mathbb{C}} = X + iX$ nazywamy wektor dodatni

$$|x + iy| := \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} (x \cos \theta + y \sin \theta) \in X_+, \quad (2.3)$$

który istnieje na mocy Stwierdzenia 2.29.

Tak zdefiniowana operacja spełnia standardowe własności wartości bezwzględnej.

Lemat 2.31. *Niech X będzie kratą Banacha. Wtedy dla dowolnych wektorów $z, w \in X_{\mathbb{C}}$ oraz skalaru $\lambda \in \mathbb{C}$ operacja modułu $X_{\mathbb{C}} \ni z \rightarrow |z| \in X_+$ ma następujące własności*

(niezdegenerowanie) $|z| = 0 \iff z = 0$,

(dodatnia jednorodność) $|\lambda z| = |\lambda||z|$,

(nierówność trójkąta) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

DOWÓD. Przyjmijmy, że $z = x + iy$ i $w = u + iv$, dla pewnych $x, y, u, v \in X$. Korzystając z Twierdzeń 2.22 i 2.20 utożsammy ideał I_e generowany przez element $e = |x| + |y| + |u| + |v|$, z przestrzenią $C(M)$. Ponieważ niezdegenerowanie, dodatnia jednorodność i nierówność trójkąta zachodzą w przestrzeni $C(M)$, zachodzą też w X_e i w całej przestrzeni X . $\square$

Twierdzenie 2.32. *Niech X będzie kratą Banacha. Wtedy wzór*

$$\|z\|_{\mathbb{C}} := \||z|\| \quad (2.4)$$

definiuje normę na $X_{\mathbb{C}}$. Ponadto para $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ jest przestrzenią Banacha.

DOWÓD. Najpierw korzystając z Lematu 2.31 oraz z tego, że $\|\cdot\|$ jest normą pokażemy, że formuła (2.4) zadaje normę w $X_{\mathbb{C}}$. Niezdegenerowanie zachodzi, ponieważ $0 = \|z\|_{\mathbb{C}} = \||z|\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| = 0$, a to jest równoważne temu, że $z = 0$. Dodatnia jednorodność wynika z rachunków

$$\|\lambda z\|_{\mathbb{C}} = \||\lambda z|\| = \||\lambda||z|\| = |\lambda|\||z|\| = |\lambda|\|z\|_{\mathbb{C}}.$$

Podobnie otrzymujemy nierówność trójkąta

$$\|z + w\|_{\mathbb{C}} = \||z + w|\| \leq \||z| + |w|\| \leq \||z|\| + \||w|\| = \|z\|_{\mathbb{C}} + \|w\|_{\mathbb{C}}.$$

Zauważmy, że norma zdefiniowana wzorem $\|z\|_1 = \|x\| + \|y\|$ jest zupełna. Weźmy w tym celu ciąg Cauchy'ego $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X_{\mathbb{C}}$. Wtedy $z_n = x_n + iy_n$ dla pewnych ciągów Cauchy'ego $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$. Ale z zupełności X wynika, że $\|z_n - (x + iy)\|_1 = \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$ dąży do 0 przy n dążącym do nieskończoności. Udowodnimy teraz, że norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ jest równoważna normie $\|\cdot\|_1$. Podstawiając 0, π oraz $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ w miejsce θ we wzorze (2.2) otrzymujemy $|x| \leq |z|$ oraz $|y| \leq |z|$. Stąd

$$\frac{1}{2}\|z\|_1 = \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) = \frac{1}{2}(\||x|\| + \||y|\|) \leq \frac{1}{2}(\||z|\| + \||z|\|) = \|z\|_{\mathbb{C}}.$$

Dodatkowo z drugiej strony z tego, że $\sin \theta, \cos \theta \leq 1$, mamy

$$\|z\|_{\mathbb{C}} = \||z|\| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos \theta + y \sin \theta\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Zatem normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ są równoważne. Czyli z zupełności w normie $\|\cdot\|_1$ wynika zupełność w normie $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$. $\square$

Definicja 2.33. *Zespoloną kratą Banacha* nazywamy parę $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$, gdzie $X_{\mathbb{C}}$ jest kompleksyfikacją pewnej rzeczywistej kraty wektorowej X , a $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ normą daną wzorem (2.4).

Uwaga 2.34. Wprost z powyższej definicji wynika, że w zespolonej kratce Banacha zachodzi warunek na kratowość normy z definicji rzeczywistej kraty Banacha, czyli

$$|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|$$

dla dowolnych $x, y \in X_{\mathbb{C}}$.

Każdą funkcję zespoloną $z : M \rightarrow \mathbb{C}$ można zapisać jako $z = x + iy$, gdzie $x, y : M \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami rzeczywistymi – odpowiednio częścią rzeczywistą oraz częścią urojoną funkcji z . Rozkład ten pozwala na naturalne utożsamienie kompleksyfikacji przestrzeni funkcji rzeczywistych z ich zespolonymi odpowiednikami.

Przykład 2.35. Dla dowolnej przestrzeni zwartej M przestrzeń $C(M, \mathbb{C})$ zespolonych funkcji ciągłych na M jest w naturalny sposób kompleksyfikacją rzeczywistej kraty Banacha $C(M, \mathbb{R})$, której elementami są rzeczywiste funkcje ciągłe. Przy tym moduł i norma zdefiniowane abstrakcyjnie w Stwierdzeniu 2.29 i Twierdzeniu 2.32 pokrywają się ze modułem funkcji i normą supremum w $C(M, \mathbb{C})$. Symbolicznie możemy to zapisać

$$C(M, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = C(M, \mathbb{C}).$$

Przykład 2.36. Dla dowolnej przestrzeni z miarą (M, Σ, μ) oraz dowolnego $p \in [1, \infty]$, podobnie jak w przykładzie powyżej, zespolona przestrzeń Banacha $L^p(\mu, \mathbb{C})$ jest w naturalny sposób kompleksyfikacją rzeczywistej kraty Banacha $L^p(\mu, \mathbb{R})$, w tym sensie, że moduł i norma zdefiniowane abstrakcyjnie w Stwierdzeniu 2.29 i Twierdzeniu 2.32 pokrywają się ze modułem funkcji i normą supremum w $L^p(\mu, \mathbb{C})$. Zatem możemy również napisać

$$L^p(\mu, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = L^p(\mu, \mathbb{C}).$$

Rozdział 3

Operatory na kratach Banacha

3.1 Operatory na przestrzeniach Banacha

Odwzorowanie $T : X \rightarrow Y$ między przestrzeniami liniowymi X i Y spełniające warunki

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \text{ i } \quad T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \text{ dla dowolnych } x, y \in X \text{ i } \alpha \in \mathbb{R},$$

nazywamy *operatorem liniowym*. Zgodnie ze standardową konwencją nawiasy będziemy pomijać i pisać Tx zamiast $T(x)$, a operator liniowy skrótowo nazywać *operatorem*. Zbiór wszystkich operatorów liniowych na przestrzeniach wektorowych X i Y oznaczamy $L(X, Y)$. Wraz z działaniami określonymi punktowo tworzy on przestrzeń wektorową. To znaczy dodawanie operatorów liniowych i mnożenie przez skalar określone są wzorami

$$(T + S)x = Tx + Sx, \quad (\alpha T)x = \alpha \cdot Tx,$$

dla każdego $x \in X$ oraz dowolnych $S, T \in L(X, Y)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definicja 3.1. Operator liniowy $T : X \rightarrow Y$ przestrzeni unormowanych X i Y nazywamy *ograniczonym* jeśli dla pewnej liczby rzeczywistej c spełnia *nierówność ograniczoności*

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \tag{3.1}$$

dla każdego $x \in X$. Zbiór wszystkich operatorów ograniczonych na przestrzeniach unormowanych X i Y oznaczamy $B(X, Y)$.

Uwaga 3.2. W powyższej definicji norma po lewej stronie nierówności jest normą w przestrzeni Y , a po prawej - przestrzeni X . Dla uproszczenia zapisu oznaczamy je tym samym symbolem, co nie prowadzi do nieporozumień.

Uwaga 3.3. Z nierówności (3.1) wynika, że operator ograniczony przeprowadza zbiory ograniczone na zbiory ograniczone.

Naturalnie przychodzi pytanie, jaka jest najmniejsza stała, spełniająca nierówność ograniczoności. Przy założeniu, że $x \neq 0$ (gdy $x = 0$ mamy $Tx = 0$ i nierówność zachodzi) możemy ją podzielić obustronnie przez $\|x\|$. Mamy więc $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$. Zatem najmniejsze takie c jest równe supremum wyrażenia po lewej stronie tej nierówności, co z kolei kładąc $y = \frac{x}{\|x\|}$ jest równe wyrażeniu $\sup_{\|y\|=1} \|Ty\|$.

Definicja 3.4. Normą operatora ograniczonego T nazywamy najmniejszą liczbę rzeczywistą c , dla której zachodzi nierówność ograniczoności (3.1) i oznaczamy ją przez $\|T\|$. Równoważnie

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \quad (3.2)$$

Przykład 3.5. Operator identycznościowy $I : X \rightarrow X$ określony wzorem $Ix = x$ dla każdego $x \in X$, na przestrzeni unormowanej X jest ograniczony i jego norma wynosi $\|I\| = 1$ (chyba, że $X = \{0\}$).

Przykład 3.6. Operator różniczkowania $T : C^{(1)}[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$, zadany wzorem $Tx(t) = x'(t)$ dla każdego $t \in [-1, 1]$, wraz z standardowymi normami na przestrzeniach $C^{(1)}[-1, 1]$ i $C[-1, 1]$, czyli odpowiednio normami

$$\|x\|_{(1)} = \sup_{t \in [-1, 1]} |x(t)| + \sup_{t \in [-1, 1]} |x'(t)|, \quad \|x\|_{\infty} = \sup_{t \in [-1, 1]} |x(t)|,$$

jest operatorem ograniczonym. Jego norma wynosi $\|T\| = 1$. Nierówność $\|T\| \leq 1$ zachodzi, ponieważ $\|Tx\|_{\infty} = \|x'\|_{\infty} \leq \|x\|_{\infty} + \|x'\|_{\infty} = 1 \cdot \|x\|_{(1)}$. W celu pokazania nierówności w drugą stronę przyjmijmy ciąg zadany wzorem na przykład $x_n(t) = \frac{t^n}{n+1}$. Jego norma wynosi

$$\|x_n\|_{(1)} = \sup_{t \in [-1, 1]} \left| \frac{t^n}{n+1} \right| + \sup_{t \in [-1, 1]} \left| \frac{nt^n}{n+1} \right| = \frac{t^n}{n+1} + \frac{nt^n}{n+1} = 1$$

oraz norma zadanego na nim operatora zbiega do 1:

$$\|Tx_n\|_{\infty} = \sup_{t \in [-1, 1]} \left| \frac{nt^n}{n+1} \right| = \frac{nt^n}{n+1} \rightarrow 1.$$

Przykład 3.7. Niech (M, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą. Wtedy przestrzeń funkcji całkowalnych ze standardową normą $\|x\|_1 = \int_{\Sigma} |x| d\mu$ tworzą przestrzeń Banacha. Zadany na niej operator całkowania $T : L^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ określony wzorem $Tx = \int_M x d\mu$ jest operatorem ograniczonym o normie 1. Nierówność $\|T\| \leq 1$ zachodzi, ponieważ $|Tx| = \left| \int_M x d\mu \right| \leq \int_M |x| d\mu = 1 \cdot \|x\|_1$. Weźmy teraz dowolny zbiór mierzalny $A \in \Sigma$ o niezerowej mierze skończonej $0 < \mu(A) < \infty$. Wtedy wektor $x = \frac{1}{\mu(A)} \mathbb{1}_A$ ma normę $\|x\|_1 = 1$ oraz $|Tx| = 1$. Zatem zachodzi nierówność w drugą stronę $1 \leq \|T\|$.

Jak widzimy, już na prostych przykładach badanie ograniczoności operatora może być kłopotliwe. Jednak okazuje się, że w niektórych przypadkach ograniczoność jest automatyczna. Na przykład dochodzenie, czy operator jest ograniczony zawęża się tylko do operatorów określonych na przestrzeniach nieskończenie wymiarowych:

Twierdzenie 3.8. Operator liniowy na skończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej jest ograniczony.

Ważnym faktem jest, że ograniczoność operatora jest równoważna jego ciągłości, a nawet ciągłości tylko w jednym punkcie.

Twierdzenie 3.9. *Niech $T : X \rightarrow Y$ operator liniowy między przestrzeniami unormowanymi X i Y . Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (1) T jest ograniczony;
- (2) T jest odwzorowaniem ciągłym;
- (3) T jest odwzorowaniem ciągłym w pewnym punkcie $x_0 \in X$.

Jedną ze standardowych metod konstrukcji operatorów ograniczonych jest zadanie ich na gęstej podprzestrzeni, a następnie przedłużenie za pomocą następującej zasady ciągłego przedłużania operatorów:

Twierdzenie 3.10. *Niech Y będzie przestrzenią Banacha, X przestrzenią unormowaną i Z jej gęstą podprzestrzenią $Z \subseteq X$ (tzn. $\overline{Z} = X$). Wtedy każdy ograniczony operator liniowy $T : Z \rightarrow Y$ przedłuża się jednoznacznie do operatora ograniczonego $\overline{T} : X \rightarrow Y$. Ponadto normy tych operatorów są sobie równe $\|\overline{T}\| = \|T\|$.*

Zbiór wszystkich operatorów ograniczonych na przestrzeniach unormowanych sam w sobie jest przestrzenią unormowaną. A żeby był przestrzenią Banacha wystarczy tylko założyć, że jego przeciwdziedzina jest przestrzenią Banacha.

Twierdzenie 3.11. *Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Wtedy zbiór wszystkich operatorów ograniczonych na tych przestrzeniach $B(X, Y)$, wraz z normą operatorową $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ jest przestrzenią unormowaną. Ponadto, $B(X, Y)$ jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest przestrzenią Banacha.*

Teraz przytoczymy kilka podstawowych faktów o operatorach zwartych z książki [17]. Przypomnijmy, że podzbiór $M \subseteq X$ przestrzeni metrycznej X jest *zwarty*, jeśli każdy ciąg w M ma podciąg zbieżny w M . Każdy podzbiór zwarty jest domknięty i ograniczony. Jeżeli X jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, to podzbiór $M \subseteq X$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony. W przestrzeniach nieskończenie wymiarowych ta charakterystyka nie zachodzi. De facto kula domknięta w przestrzeni unormowanej X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim(X) < \infty$. Zbiór $M \subseteq X$ nazywamy *warunkowo zwartym* jeżeli jego domknięcie $\overline{M}$ jest zbiorem zwartym. W szczególności, zbiory warunkowo zwarte są ograniczone (ale niekoniecznie domknięte).

Definicja 3.12. Operator liniowy $T : X \rightarrow Y$ zadany na przestrzeniach unormowanych X, Y nazywamy *zwartym* jeśli przeprowadza zbiór ograniczony B na zbiór warunkowo zwarty $T(B)$, to znaczy domknięcie obrazu $\overline{T(B)}$ jest zwarte. Zbiór wszystkich operatorów zwartych $T : X \rightarrow Y$ oznaczamy $K(X, Y)$.

Uwaga 3.13. Zauważmy, że operator liniowy jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy przeprowadza zbiory ograniczone na zbiory ograniczone. Skoro zbiory warunkowo zwarte są ograniczone, to *operatory zwarte są ograniczone*.

Stwierdzenie 3.14. *Operator liniowy $T : X \rightarrow Y$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg ograniczony $\{x_n\} \subseteq X$ przeprowadza na ciąg $\{Tx_n\} \subseteq Y$, dla którego istnieje podciąg zbieżny w Y .*

DOWÓD. Jeśli operator T jest zwarty i ciąg $\{x_n\} \subseteq X$ jest ograniczony, to domknięcie zbioru $\{Tx_n\} \subseteq Y$ jest zwarte, a zatem pewien podciąg $\{Tx_n\}$ jest zbieżny. Z drugiej strony, przyjmijmy teraz, że dla każdego ciągu ograniczonego $\{x_n\} \subseteq X$ istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}$, którego obraz $\{Tx_{n_k}\}$ jest zbieżny w Y . Rozważmy dowolny zbiór ograniczony $B \subseteq X$ i niech $\{y_n\}$ będzie ciągiem w $T(B)$. Wtedy $y_n = Tx_n$ dla pewnych $x_n \in B$, i ponieważ zbiór B jest ograniczony, to ciąg $\{x_n\}$ również jest ograniczony. Z założenia $\{Tx_n\}$ zawiera podciąg zbieżny. Z dowolności wyboru ciągu $\{y_n\}$ w $T(B)$ domknięcie $\overline{T(B)}$ jest zwarte. Zatem operator T jest zwarty. $\square$

Definicja 3.15. Powiemy, że operator ograniczony $T : X \rightarrow Y$ jest operatorem *skończonego rzędu* jeżeli $\dim(TX) < \infty$, czyli jeżeli jego obraz ma wymiar skończony.

Twierdzenie 3.16. *Każdy ograniczony operator skończonego rzędu jest zwarty. Ponadto każdy operator $T : X \rightarrow Y$ określony na skończenie wymiarowej przestrzeni X jest zwarty.*

DOWÓD. Rozważmy dowolny ciąg ograniczony $\{x_n\} \subseteq X$. Wtedy z nierówności ograniczoności (3.1), $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$ ciąg $\{Tx_n\}$ również jest ograniczony. Zatem skoro $\dim(TX) < \infty$, to zbiór $\{Tx_n\}$ jest warunkowo zwarty. Stąd ostatecznie operator T jest zwarty.

Założmy teraz, że $\dim(X) < \infty$. Wtedy $\dim(TX) \leq \dim(X) < \infty$. Zatem T jest zwarty na mocy poprzedniego kroku. $\square$

Przykład 3.17. Operator identycznościowy $I : X \rightarrow X$, czyli zdefiniowany wzorem $Ix = x$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim(X) < \infty$. Jeśli $\dim(X) < \infty$, to I jest zwarty na mocy Twierdzenia 3.16. Jeśli $\dim(X) = \infty$, to domknięta kula jednostkowa B nie jest zwarta, mimo iż jest zbiorem domkniętym i ograniczonym. Czyli B jest zbiorem ograniczonym, którego obraz $I(B) = B$ nie jest warunkowo zwarty. Zatem I nie jest operatorem zwartym.

Przykład 3.18. Z Twierdzenia 3.16 wynika, że operator całkowania z Przykładu 3.7, czyli $T : L^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ określony wzorem $Tx = \int_M x d\mu$ jest zwarty.

W następnym przykładzie dowiedzimy zwartości *operatorów całkowych* na przestrzeni funkcji ciągłych. W rozumowaniu skorzystamy z zastosowania klasycznego twierdzenia analizy funkcjonalnej - Twierdzenia Ascoli'ego - do funkcji ciągłych na przedziale zwartym.

Przypomnijmy, że ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C[a, b]$ nazywamy *jednostajnie ciągłym* (lub *równociągłym*) jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdych x_n i $t_1, t_2 \in [a, b]$ spełniających $|t_1 - t_2| < \delta$ zachodzi ograniczenie

$$|x_n(t_1) - x_n(t_2)| < \varepsilon.$$

Lemat 3.19 (Ascoli). *Jeśli ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C[a, b]$ jest ograniczony oraz jednostajnie ciągły, to ma podciąg zbieżny w $C[a, b]$.*

Dowód tego lematu można znaleźć między innymi w książce [20].

Przykład 3.20 (Operator całkowy). Rozważmy dowolny przedział zwarty $[a, b]$ i funkcję ciągłą $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wtedy operator $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ zadany wzorem

$$Tx(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds$$

nazywamy *operatorem całkowym*, a funkcję k jego *jądrem*. Pokażemy, że tak zdefiniowany operator jest zwarty. Operator T jest ograniczony, gdyż z monotoniczności całki wynika że

$$\|Tx\| = \sup_{t \in [a, b]} \left| \int_a^b k(t, s)x(s)ds \right| \leq \|x\| \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |k(t, s)|ds,$$

skąd $\|T\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |k(t, s)|ds$. Natomiast funkcja $[a, b] \in t \mapsto \int_a^b |k(t, s)|ds$ jest ograniczona, gdyż jest ciągła i określona na przedziale zwartym. Zatem

$$\|T\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |k(t, s)|ds < \infty.$$

Niech teraz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C[a, b]$ będzie ciągiem ograniczonym przez stałą c . Wprowadźmy oznaczenie $y_n = Tx_n$. Wtedy $\|y_n\| \leq \|T\|\|x_n\| \leq \|T\|c$, zatem ciąg $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C[a, b]$ również jest ograniczony. Następnie pokażemy, że ciąg $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest równomiernie ciągły. Zauważmy najpierw, że funkcja k jest jednostajnie ciągła, jako funkcja ciągła określona na zbiorze zwartym $[a, b] \times [a, b]$. Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $s \in [a, b]$ i $t_1, t_2 \in [a, b]$, spełniających nierówność $|t_1 - t_2| \leq \delta$ mamy

$$|k(t_1, s) - k(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)c}.$$

Stąd dla dowolnych $t_1, t_2 \in [a, b]$, spełniających nierówność $|t_1 - t_2| \leq \delta$ zachodzi

$$|y_n(t_1) - y_n(t_2)| = \left| \int_a^b [k(t_1, s) - k(t_2, s)]x(s)ds \right| < (b-a) \frac{\varepsilon}{(b-a)c} c = \varepsilon.$$

Zatem ciąg $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnie ciągły. Korzystając z Lematu 3.19 wnioskujemy więc, że dla $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ istnieje podciąg zbieżny w $C[a, b]$. Wobec tego na mocy Stwierdzenia 3.14 operator T jest zwarty.

Twierdzenie 3.21. *Jeśli ciąg operatorów zwartych $\{T_n : X \rightarrow Y\}_{n \in \mathbb{N}}$ między przestrzeniami Banacha X, Y jest zbieżny do operatora T , to operator T jest zwarty.*

DOWÓD. Ze zwartości operatora T_1 wynika, że dla ciągu ograniczonego $\{x_m\} \subseteq X$ istnieje podciąg $\{x_{1,m}\}$ taki, że ciąg $\{T_1 x_{1,m}\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Podobnie istnieje podciąg $\{x_{2,m}\}$ ciągu $\{x_{1,m}\}$ taki, że ciąg $\{T_2 x_{2,m}\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Kontynuując to rozumowanie otrzymujemy podciąg $\{y_m\} = \{x_{m,m}\}$ ciągu $\{x_m\}$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

ciąg $\{T_n y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ jest Cauchy. Przy czym z ograniczoności ciągu $\|x_m\| \leq c$ wynika z ograniczoności jego podciągu $\|y_m\| \leq c$. Skoro ciąg operatorów T_n zbiega do operatora T , to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że $\|T - T_p\| < \frac{\varepsilon}{3c}$. Dodatkowo skoro ciąg $\{T_p y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ jest Cauchy, to $\|T_p y_j - T_p y_k\| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla $j, k > N$ i pewnego N . Zatem dla $j, k > N$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|T y_j - T y_k\| &\leq \|T y_j - T_p y_j\| + \|T_p y_j - T_p y_k\| + \|T_p y_k - T y_k\| \leq \\ &\leq \|T - T_p\| \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_p - T\| \|y_k\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3c} c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} c = \varepsilon. \end{aligned}$$

Czyli ciąg $\{T y_m\}$ jest ciągiem Cauchy'ego, a ponieważ przestrzeń Y jest zupełna, ciąg $\{T y_m\}$ jest zbieżny. $\square$

Uwaga 3.22. Powyższe twierdzenie mówi, że zbiór $K(X, Y)$ operatorów zwartych jest domkniętym podzbiorem przestrzeni operatorów ograniczonych $B(X, Y)$. Kombinacja liniowa operatorów zwartych jest operatorem zwartym. Zatem de facto $K(X, Y)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $B(X, Y)$.

Wniosek 3.23. *Granica operatorów skończonego rzędu jest operatorem zwartym.*

DOWÓD. Wynika to wprost z Twierdzeń 3.16 oraz 3.21. $\square$

Uwaga 3.24. W przestrzeniach Hilberta powyższą implikację da się odwrócić, tzn. można pokazać, że operator jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą operatorów skończonego rzędu, patrz [7]. Taka charakteryzacja nie ma miejsca w ogólnych przestrzeniach Banacha, co było przez wiele lat nierozwiązanym ważnym pytaniem. W 1973 roku Per Enflo podał kontrprzykład, opierając się na pracy Alexandra Grothendiecka i Stefana Banacha. W przykładzie poniżej pokażemy jak zastosować Twierdzenie 3.21, przy dowodzeniu zwartości operatora.

Przykład 3.25. Pokażemy, że operator $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ zadany wzorem

$$Tx = \left(x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \dots \right)$$

jest zwarty. Rozważmy ciąg operatorów $T_n : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, gdzie

$$T_n x = \left(x(1), \frac{x(2)}{2}, \dots, \frac{x(n)}{n}, 0, 0, \dots \right).$$

Wtedy każdy element ciągu jest operatorem ograniczonym, więc z Twierdzenia 3.16, są to operatory zwarte. Ponadto

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left| \frac{x(i)}{i} \right|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2},$$

czyli przechodząc do supremum po x o normie 1 otrzymujemy

$$\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Zatem $T_n \rightarrow T$ i na mocy Twierdzenia 3.21 operator T jest zwarty.

3.2 Elementy teorii spektralnej

Teraz omówimy elementy teorii spektralnej, którą rozpatruje się nad ciałem liczb zespolonych. Dlatego od tej pory wszystkie przestrzenie liniowe będą zespolone, tzn. nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. W całym podrozdziale $T \in B(X)$ będzie operatorem ograniczonym na *zespolonej przestrzeni Banacha* X .

Definicja 3.26. *Zbiorem rezolwenty* operatora T nazywamy zbiór $\rho(T)$ tych liczb zespolonych λ , dla których operator $\lambda I - T$ jest odwracalny, czyli

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{odwzorowanie } \lambda I - T : X \rightarrow X \text{ jest odwracalne}\}.$$

Operator

$$R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T),$$

nazywamy *rezolwentą operatora* T w punkcie λ . Dopelnienie zbioru $\rho(T)$ w $\mathbb{C}$ nazywamy *widmem* (lub też *spektrum*) operatora T i oznaczamy przez $\sigma(T)$. Czyli

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{odwzorowanie } \lambda I - T : X \rightarrow X \text{ jest nieodwracalne}\}.$$

Uwaga 3.27. Zauważmy, że $B(X)$ jest nie tylko przestrzenią Banacha, ale jest również algebrą z mnożeniem zdefiniowanym jako składanie operatorów. Jest to modelowy przykład algebry Banacha z jedyneką. Jedyneką w $B(X)$ jest operator identycznościowy I . Zatem mówiąc o odwracalności operatora można myśleć tu o odwracalności w dwóch sensach: odwracalności jako odwzorowania (czyli bijectywności) oraz odwracalności w sensie algebraicznym, czyli jako o istnieniu operatora odwrotnego w algebrze $B(X)$. Natomiast, z Twierdzenia Banacha-Steinhaus'a wynika, że jeżeli operator $T \in B(X)$ jest odwracalny jako odwzorowanie, to odwzorowanie odwrotne T^{-1} jest automatycznie operatorem ograniczonym, czyli $T \in B(X)$. Zatem odwracalności w obu sensach są sobie równoważne.

Jeśli T jest operatorem ograniczonym, to *promień spektralny* $r(T)$ dany jest wzorem

$$r(T) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}. \quad (3.3)$$

Zauważmy, że promień spektralny jest liczbą skończoną. De facto, z submultiplikatywności normy wynika, że

$$r(T) \leq \|T\|.$$

Lemat 3.28 (Lemat Neumana). *Niech $T \in B(X)$ będzie operatorem ograniczonym na przestrzeni Banacha X oraz niech $r(T) < 1$. Wtedy operator $I - T$ jest odwracalny w $B(X)$, a jego odwrotność wyraża się wzorem*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

DOWÓD. Niech $T \in B(X)$ i $r(T) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$. Te drugie założenie zastosowane do kryterium Cauchy'ego-Hadamarda oznacza, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ jest zbieżny. Czyli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ jest bezwzględnie zbieżny, więc w szczególności zbieżny (gdyż $B(X)$ jest przestrzenią zupełną). Skoro $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| < \infty$, to $\|T^n\| \rightarrow 0$, czyli $T^n \rightarrow 0$. Zatem

$$(I - T) \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n T^k - \sum_{k=0}^n T^{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - T^{n+1}) = I.$$

Analogicznie można wykazać $\sum_{k=0}^{\infty} T^k \cdot (I - T) = I$. Stąd operator $I - T$ jest odwracalny i jego odwrotność wyraża się wzorem $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. $\square$

Uwaga 3.29. Zauważmy, że nierówność $\|T\| < 1$ implikuje, że $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$, ale warunki te nie są równoważne. Zazwyczaj powyższy lemat formułuje się przy założeniu, że $\|T\| < 1$, gdyż wtedy przypomina on znaną ze szkoły formułę sumy liczbowego szeregu geometrycznego: jeżeli $|q| < 1$, to szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ jest zbieżny i jego suma wynosi $(1 - q)^{-1}$.

Twierdzenie 3.30. Niech $T \in B(X)$ będzie operatorem ograniczonym na przestrzeni Banacha X .

- (1) Zbiór rezolwenty $\rho(T)$ jest otwarty, a więc widmo $\sigma(T)$ jest zbiorem domkniętym.
- (2) Odwzorowanie $\rho(T) \ni \lambda \rightarrow R(\lambda, T) \in B(X)$ jest holomorficzne w $\rho(T)$. Ponadto, dla $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda, T) = (-1)^k k! R(\lambda, T)^{k+1}. \quad (3.4)$$

- (3) Jeżeli $T \in B(X)$, to dla każdego skalaru $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniającego nierówność $|\lambda| > r(T)$, mamy $\lambda \in \rho(T)$ oraz

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n, \quad (3.5)$$

gdzie szereg ten jest zbieżny w normie operatorowej. Ponadto

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}. \quad (3.6)$$

- (4) Widmo $\sigma(T)$ jest zawsze niepustym zbiorem zwartym. W szczególności zbiór rezolwenty $\rho(T)$ jest otwartym otoczeniem nieskończoności.

DOWÓD. (1) i (2). Niech $\mu \in \rho(T)$. Zauważmy, że

$$\lambda I - T = \left(I - (\mu - \lambda) R(\mu, T) \right) (\mu I - T)$$

Ponadto, jeżeli $|\mu - \lambda| < \|R(\mu, T)\|^{-1}$, czyli $\|(\mu - \lambda) R(\mu, T)\| < 1$, to stosując lemat Neumanna, operator $I - (\mu - \lambda) R(\mu, T)$ jest odwracalny oraz

$$\left(I - (\mu - \lambda) R(\mu, T) \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, T)^n.$$

Zatem operator $\lambda I - T$ jako iloczyn operatorów odwracalnych $[(I - (\mu - \lambda)R(\mu, T)) \cdot (\mu I - T)]$ jest odwracalny i jego odwrotność to

$$(\lambda I - T)^{-1} = (\mu I - T)^{-1} \cdot [(I - (\mu - \lambda)R(\mu, T))]^{-1} = R(\mu, T) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, T)^n.$$

Konkludując, jeśli $|\mu - \lambda| < \|R(\mu, T)\|^{-1}$, to $\lambda \in \rho(T)$ oraz

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, T)^{n+1} \quad (3.7)$$

Zatem $\rho(T)$ jest zbiorem otwartym i stąd $\sigma(T)$ jest zbiorem domkniętym. Ponadto $R(\cdot, T)$ jest funkcją analityczną na $\rho(T)$ i z porównania formuły (3.7) z rozwinięciem w szereg Taylora $R(\lambda, T)$ otrzymujemy (3.4).

(3). Niech $T \in B(X)$ oraz $|\lambda| > r(T) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$. Ten drugi warunek oznacza, że operator $\frac{T}{\lambda}$ spełnia założenia lematu Neumanna, czyli operator $(I - \frac{T}{\lambda})$ jest odwracalny i jego odwrotność wynosi $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{T}{\lambda})^n$. Zatem operator $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$ jest odwracalny jako iloczyn operatora odwracalnego przez liczbę różną od zera, oraz

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{T}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Stąd $\lambda \in \rho(T)$ oraz (3.5).

Zatem $r(T) \geq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. Aby dowieść odwrotnej nierówności, zauważmy, że funkcja $R(\cdot, T)$ jest analityczna w obszarze $|\lambda| > \sup_{\mu \in \sigma(T)} |\mu|$, który jest otoczeniem nieskończoności, i na tym obszarze rozwija się w szereg Laurenta. To rozwinięcie musi być zgodne z (3.5). Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda \lambda^{-n} T^n\| = 0$ dla $|\lambda| > \sup_{\mu \in \sigma(T)} |\mu|$. Dla dowolnego ϵ istnieje λ takie, że $\sup_{\mu \in \sigma(T)} |\mu| \leq |\lambda| \leq \epsilon + \sup_{\mu \in \sigma(T)} |\mu|$. Zatem dla dostatecznie dużych n mamy

$$\|T^n\| \leq |\lambda|^n \leq \left(\epsilon + \sup_{\mu \in \sigma(T)} |\mu| \right)^n$$

co dowodzi, że $r(T) \leq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

(4). Widmo jest zbiorem ograniczonym na mocy wzoru (3.6) oraz domkniętym na mocy 1). Zatem potrzebujemy jedynie wykazać niepustość $\sigma(T)$. Załóżmy nie wprost, że $\sigma(T) = \emptyset$, czyli $\rho(T) = \mathbb{C}$. Innymi słowy rezolwenta $R(\cdot, T) : \mathbb{C} \rightarrow B(X)$ jest *funkcją całkowitą*, czyli analityczną na całej płaszczyźnie zespolonej. Ponadto rezolwenta zbiega do zera w nieskończoności. Rzeczywiście, dla $|\lambda| > \|T\|$, z rozwinięcia (3.5) dostajemy

$$\|R(\lambda, T)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|T\|}{|\lambda|} \right)^n = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \rightarrow 0, \text{ gdy } |\lambda| \rightarrow \infty.$$

W szczególności więc, rezolwenta jest funkcją ograniczoną. Twierdzenie Liouville'a głosi, że każda zespolona funkcja całkowita, która jest ograniczona, jest stała. Zatem na mocy Twierdzenia Liouville'a $R(\cdot, T)$ jest funkcją stałą tożsamościowo równą zero:

$$R(\cdot, T) \equiv 0.$$

Prowadzi to do sprzeczności z faktem, że $R(0, T) = T^{-1}$, bo operator odwracalny nie może być zerem.

□

Rezolwenta dowolnego operatora T spełnia *tożsamość rezolwenty*:

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T), \quad (3.8)$$

dla $\lambda, \mu \in \rho(T)$; z której w szczególności wynika, że operatory $R(\lambda, T)$ i $R(\mu, T)$ są przemienne. Dla każdego ograniczonego operatora widmo jest zwartym podzbiorem zbioru liczb zespolonych $\mathbb{C}$ takim, że $\sigma(T) \neq \emptyset$. Oczywiście, promień spektralny spełnia $r(T) \leq \|T\|$. Aby pokazać, że pewna liczba zespolona należy do widma operatora, często używa się następującego Twierdzenia.

Twierdzenie 3.31. *Niech $T \in B(X)$ będzie operatorem ograniczonym. Jeśli $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $\lambda_n \in \rho(T)$, to $\lambda \in \sigma(T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{R(\lambda_n, T)\}$ jest nieograniczony. Ponadto, jeśli $\lambda \in \rho(T)$, to $\text{dist}(\lambda, \sigma(T)) = \frac{1}{r(R(\lambda, T))} \geq \frac{1}{\|R(\lambda, T)\|}$.*

DOWÓD. Aby dowieść pierwszej części założmy, że $\lambda \in \rho(T)$. Wtedy z ciągłości $R(\cdot, T)$ na zbiorze $\rho(T)$ wynika, że $R(\lambda, T)$ jest skończony. Z drugiej strony jeśli $\|R(\lambda_n, T)\| \leq M$ dla każdego n , to z wzoru (3.7) wnioskujemy, że każda λ_n jest środkiem dysku $|\mu - \lambda_n| < \frac{1}{M}$, w którym szereg jest zbieżny i ta granica definiuje rezolwentę. Ponieważ promienie tych dysków nie zależą od n , λ zawiera się w niektórych z nich, więc $\lambda \in \rho(T)$.

Aby dowieść drugiej części, zauważmy, że dla $\lambda \in \rho(T)$ mamy

$$\sigma(R(\lambda, T)) \setminus \{0\} = \left\{ \frac{1}{\lambda - \mu}; \mu \in \sigma(T) \right\}. \quad (3.9)$$

Rzeczywiście, dla $\mu \neq 0$ zachodzi

$$\begin{aligned} (\alpha I - R(\lambda, T))f &= \alpha \left(\left(\lambda - \frac{1}{\alpha} \right) I - T \right) R(\lambda, T)f \\ &= \alpha R(\lambda, T) \left(\left(\lambda - \frac{1}{\alpha} \right) I - T \right) f. \end{aligned}$$

Zatem $0 \neq \alpha \in \sigma(R(\lambda, T))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda - \frac{1}{\alpha} \in \sigma(T)$. Stąd dla $\lambda \in \rho(T)$ mamy

$$\begin{aligned} \text{dist}(\lambda, \sigma(T)) &= \inf\{|\lambda - \mu|; \mu \in \sigma(T)\} = \left(\sup \left\{ \frac{1}{|\lambda - \mu|}; \mu \in \sigma(T) \right\} \right)^{-1} \\ &= (\max\{|\alpha|; \alpha \in \sigma(R(\lambda, T))\})^{-1} = \frac{1}{r(R(\lambda, T))} \geq \frac{1}{\|R(\lambda, T)\|}. \end{aligned}$$

□

Widmo operatora zwykle dzieli się na kilka podzbiorów.

- *Widmo punktowe* $\sigma_p(T)$ — zbiór takich $\lambda \in \sigma(T)$, dla których $\lambda I - T$ nie jest różnowartościowy. Czyli $\sigma_p(T)$ jest zbiorem wszystkich wartości własnych operatora T .
- *Widmo ciągłe* $\sigma_c(T)$ — zbiór takich $\lambda \in \sigma(T)$, dla których $\lambda I - T$ jest różnowartościowy i jego obraz jest gęsty w X , ale nie jest równy całemu zbiorowi X .
- *Widmo resztkowe* $\sigma_r(T)$ — zbiór takich $\lambda \in \sigma(T)$, dla których obraz $\lambda I - T$ nie jest gęsty w X .
- *Widmo brzegowe* $\sigma_{\text{per}}(T)$ — zbiór takich $\lambda \in \sigma(T)$, dla których $|\lambda| = r(T)$

Ogólnie, widmo operatora zawiera liczby, które nie są wartościami własnymi. Chyba, że jest to operator skończonego rzędu:

T jest skończonego rzędu, to $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ i jest to zbiór skończony.

Powyższa równość $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ wynika z faktu, iż dla operatora liniowego $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ suma wymiarów jądra oraz obrazu równa się wymiarowi całej przestrzeni:

$$n = \dim(\ker(T)) + \dim(T(\mathbb{C}^n)).$$

Z tej równości wynika, że dla operatorów na przestrzeniach skończonego wymiaru $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ następujące warunki są równoważne

- (1) T jest odwracalny,
- (2) T jest różnowartościowy,
- (3) T jest surjekcją.

O operatorach zwartych myślimy jako o granicy ciągu operatorów skończonego rzędu, patrz Wniosek 3.23 i Uwaga 3.24. Z tego punktu widzenia poniższe twierdzenie opisuje jak zachowuje się widmo takiej granicy. Poniższe twierdzenie, które można znaleźć w wielu źródłach, patrz np. [17, Sekcja 8.3], [7, Sekcja 7.7], przedstawia podstawowe fakty dotyczące widma operatorów zwartych.

Twierdzenie 3.32. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, T będzie operatorem zwartym działającym na X , a $\sigma(T)$ oznacza widmo operatora T . Wówczas:*

- (1) *Każda niezerowa wartość $\lambda \in \sigma(T)$ jest wartością własną operatora T .*
- (2) *Dla każdej niezerowej $\lambda \in \sigma(T)$ istnieje taka liczba całkowita m , że*

$$\ker(T - \lambda I)^m = \ker(T - \lambda I)^{m+1},$$

a ta podprzestrzeń jest skończeniem wymiarowa. Nazywa się ją uogólnioną przestrzenią własną dla λ .

- (3) *Jedynym możliwym punktem skupienia widma $\sigma(T)$ jest $\lambda = 0$.*
- (4) *Widmo $\sigma(T)$ jest co najwyżej przeliczalnie nieskończone.*
- (5) *Jeśli wymiar przestrzeni X jest nieskończony, to $\sigma(T)$ musi zawierać punkt 0.*

3.3 Operatory dodatnie na kratkach Banacha

W poniższej sekcji możemy rozważać zarówno rzeczywiste jak i zespolone kraty wektorowe. Będziemy rozróżniać te przypadki w sposób jawny tylko jeśli będzie to konieczne.

Definicja 3.33. Operator liniowy $T : X \rightarrow Y$ zadany na kratkach wektorowych X, Y nazywamy *dodatnim* jeśli wektorom dodatnim przypisuje wektory dodatnie, czyli gdy $x \geq 0$ implikuje, że $Tx \geq 0$. Piszemy wtedy symbolicznie $T \geq 0$. Zbiór wszystkich operatorów dodatnich, zadanych na kratkach wektorowych X i Y oznaczamy $L_+(X, Y)$.

Przykład 3.34. Najprostszym przykładem operatora dodatniego jest operator identycznościowy $I : X \rightarrow X$ z Przykładu 3.5. Ten operator przeprowadza każdy wektor na siebie, czyli oczywiście dla wektorów dodatnich zwraca te same dodatnie wektory.

Przykład 3.35. Niech a będzie funkcją liczbową ciągłą zadaną na zwartej przestrzeni metrycznej M . Operator mnożenia $T : C(M) \rightarrow C(M)$ przez funkcję a , czyli operator dany wzorem

$$Tx(t) = a(t)x(t), \quad \text{dla każdego } t \in M,$$

jest dodatni, tylko wtedy, gdy funkcja a jest dodatnia na całej dziedzinie. Przypomnijmy, że $x \geq 0$ oznacza, że $x(t) \geq 0$ dla każdego $t \in M$. Zatem jeśli $a \geq 0$, to rzeczywiście dodatnie wektory $x \geq 0$ operator T przeprowadza na dodatnie wektory $ax \geq 0$. Natomiast jeśli $a(t) < 0$ w pewnym punkcie M , to z ciągłości funkcji a mamy taką nierówność na pewnym otwartym U otoczeniu t . Dla dowolnej funkcji dodatniej $x \geq 0$ z nośnikiem zawartym w U mamy $Tx < 0$ na zbiorze U , czyli T nie jest dodatni.

Przykład 3.36. Niech $\varphi : M \rightarrow M$ będzie odwzorowaniem ciągłym na zbiorze zwartym M . Operator kompozycji $T : C(M) \rightarrow C(M)$ z funkcją φ , czyli operator zadany wzorem

$$Tx(t) = x(\varphi(t)), \quad \text{dla każdego } t \in M,$$

jest zawsze dodatni.

Operator różniczkowania z Przykładu 3.6 nie należy do klasy operatorów dodatnich.

Przykład 3.37. Operator różniczkowania $T : C^{(1)}[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$ zadany wzorem $Tx(t) = x'(t)$ dla każdego $t \in [-1, 1]$ nie jest operatorem dodatnim. Zauważmy, że funkcję $x(t) = (t-1)^2$, przyjmującą wartości dodatnie na całej dziedzinie przeprowadza na funkcję $x'(t) = 2(t-1)$, która na przykład dla $t = 0$ przyjmuje wartość $x'(0) = -2 < 0$.

Całkowanie często opisuje się jako operację odwrotną do różniczkowania, więc można by się spodziewać, że operator całkowania z Przykładu 3.7 również nie będzie dodatni. Jednakże całka z funkcji dodatniej jest dodatnia. Zatem operator całkowania w przeciwieństwie do operatora różniczkowania jest dodatni.

Zauważmy najpierw, że zespolone operatory dodatnie są w rzeczywistości niczym innym jak kompleksyfikacją rzeczywistych operatorów dodatnich.

Stwierdzenie 3.38. *Niech X i Y będą rzeczywistymi kratami wektorowymi, a $X_{\mathbb{C}} = X + iX$ oraz $Y_{\mathbb{C}} = Y + iY$ ich kompleksyfikacjami. Mamy bijektywną odpowiedniość*

$$L_+(X, Y) \ni T \rightarrow T_{\mathbb{C}} \in L_+(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$$

między rzeczywistymi i zespolonymi operatorami dodatnimi, gdzie

$$T_{\mathbb{C}}(x + iy) = Tx + iTy, \quad x, y \in X.$$

DOWÓD. Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnego operatora $\mathbb{R}$ -liniowego $T : X \rightarrow Y$ powyższy wzór definiuje operator $\mathbb{C}$ -liniowy $T_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \rightarrow Y_{\mathbb{C}}$. Ponadto T jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $T_{\mathbb{C}}$ jest dodatni, gdyż $TX_+ = T_{\mathbb{C}}X_+$. Zatem trzeba pokazać, że dowolny operator $T_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \rightarrow Y_{\mathbb{C}}$ jest kompleksyfikacją pewnego operatora z X w Y . Ale jeśli $T_{\mathbb{C}}$ jest dodatni, czyli $T_{\mathbb{C}}X_+ \subseteq Y_+$, to stąd iż $X = X_+ - X_+$ i $Y = Y_+ - Y_+$ oraz z addytywności $T_{\mathbb{C}}$ otrzymujemy, że

$$T_{\mathbb{C}}X = T_{\mathbb{C}}(X_+ - X_+) = T_{\mathbb{C}}(X_+) - T_{\mathbb{C}}(X_+) \subseteq Y_+ - Y_+ = Y.$$

Zatem $T_{\mathbb{C}}$ jako przekształca rzeczywistą podprzestrzeń $X \subseteq X_{\mathbb{C}}$ na rzeczywistą podprzestrzeń $Y \subseteq Y_{\mathbb{C}}$. Stąd jego obcięcie $T := T_{\mathbb{C}}|_X$ jest rzeczywistym operatorem linowym z $X \rightarrow Y$. Ponadto, dla dowolnych $x, y \in X$, z $\mathbb{C}$ -liniowości $T_{\mathbb{C}}$ mamy

$$T_{\mathbb{C}}(x + iy) = T_{\mathbb{C}}x + iT_{\mathbb{C}}y = Tx + iTy,$$

co kończy dowód. □

Następujące warunki charakteryzujące dodatniość operatora są nieustannie wykorzystywane, np. w teorii całki.

Stwierdzenie 3.39. *Dla operatora liniowego $T : X \rightarrow Y$ określonego na kratach Banacha (rzeczywistych lub zespolonych) następujące warunki są równoważne:*

- (1) T jest dodatni;
- (2) T jest monotoniczny, tzn. nierówność $x \leq y$ implikuje $Tx \leq Ty$ dla każdych $x, y \in X$;
- (3) T jest podmodułowy, tzn. $|Tx| \leq T|x|$ dla każdego $x \in X$.

DOWÓD. (1) $\Rightarrow$ (2). W nierówności $x \leq y$ odejmijmy x , a następnie nałożmy na nią operator T . Otrzymujemy $T(y - x) \geq 0$, zatem z liniowości operatora i po dodaniu Tx dostajemy monotoniczność $Tx \leq Ty$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Rozważmy najpierw przypadek rzeczywisty. Na nierówność $-|x| \leq x \leq |x|$ nałożmy T . Mamy wtedy $-T|x| = T(-|x|) \leq Tx \leq T|x|$. Zatem, gdy pierwszą nierówność pomnożymy przez -1 otrzymamy $T|x| \geq -Tx$. Otrzymujemy więc $Tx, -Tx \leq T|x|$, co oznacza, że

$$|Tx| = Tx \vee (-Tx) \leq T|x|.$$

W przypadku zespolonym, korzystając ze Stwierdzenia 3.38 potrzebujemy rozważyć kompleksyfikację $T_{\mathbb{C}}$ rzeczywistego operatora dodatniego T . Dla dowolnych $x, y \in X$, z definicji modułu zespolonego, patrz (2.3), mamy

$$|T_{\mathbb{C}}(x + iy)| = |Tx + iTy| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} (Tx \cos \theta + Ty \sin \theta) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} T(x \cos \theta + y \sin \theta).$$

Skoro $x \cos \theta + y \sin \theta \leq |x + iy|$, to z monotoniczności T (która wynika z monotoniczności $T_{\mathbb{C}}$) dostajemy $T(x \cos \theta + y \sin \theta) \leq T|x + iy| = T_{\mathbb{C}}|x + iy|$. Zatem

$$|T_{\mathbb{C}}(x + iy)| \leq T_{\mathbb{C}}|x + iy|.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Dla dodatniego wektora $x \geq 0$ zachodzi $0 \leq |Tx| \leq T|x| = Tx$. $\square$

Stwierdzenie 3.40. *Norma dodatniego operatora $T : X \rightarrow Y$ na kratkach Banacha X i Y realizuje się na wektorach dodatnich, to znaczy*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X_+ \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

DOWÓD. Nierówność w jedną stronę wynika wprost z definicji normy operatora (Definicja 3.4). Mianowicie

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \sup_{\substack{x \in X_+ \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Przeciwną nierówność otrzymujemy korzystając z Uwagi 2.10 (lub wprost z definicji normy (2.4) w przypadku zespolonym) oraz Stwierdzenia 3.39, gdyż

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \| |Tx| \| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T|x|\| = \sup_{\substack{x \in X_+ \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

$\square$

Uwaga 3.41. Z powyższego stwierdzenia wynika, że normy zespolonego operatora dodatniego i jego rzeczywistego odpowiednika pokrywają się. Dokładniej, na mocy Stwierdzenia 3.38 możemy zapisać zespolony operator dodatni $T_{\mathbb{C}}$ jako kompleksyfikację rzeczywistego operatora dodatniego T . Wzór ze Stwierdzenia 3.40 obowiązuje dla obu tych operatorów. Zatem skoro $T_{\mathbb{C}}|_X = T$, to

$$\|T_{\mathbb{C}}\| = \sup_{\substack{x \in X_+ \\ \|x\|=1}} \|T_{\mathbb{C}}x\| = \sup_{\substack{x \in X_+ \\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \|T\|.$$

Twierdzenie 3.42. *Każdy dodatni operator $T : X \rightarrow Y$ określony na kratkach Banacha X , Y jest ograniczony.*

DOWÓD. Załóżmy nie wprost, że operator T jest nieograniczony. Wtedy istnieje ciąg dodatnich wektorów $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X_+$ o normie $\|x_n\| = 1$ takich, że $n^3 \leq \|Tx_n\|$. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ jest bezwzględnie zbieżny w X , gdyż

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n\|}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Zatem z zupełności przestrzeni X istnieje $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$. Jednakże dla każdego $n \in \mathbb{N}$ z tego, że $\frac{x_n}{n^2} \leq x$, mamy $0 \leq T \frac{x_n}{n^2} \leq Tx$, zatem $n \leq \frac{1}{n^2} \|Tx_n\| = \|T \frac{x_n}{n^2}\| \leq \|Tx\|$, co prowadzi do sprzeczności, gdy przejdziemy z n do nieskończoności. $\square$

Uwaga 3.43. Nietrudno zauważyć, że zbiór operatorów dodatnich $L_+(X, Y)$ tworzy stożek w przestrzeni operatorów liniowych $L(X, Y)$ na kratkach wektorowych X i Y . Zatem $L(X, Y)$ tworzy uporządkowaną przestrzeń wektorową względem relacji

$$T \leq S \stackrel{\text{def}}{\iff} 0 \leq S - T,$$

patrz Stwierdzenie 1.30. Jeśli X i Y są kratami Banacha, to no mocy Twierdzenia 3.42 mamy $L_+(X, Y) \subseteq B(X, Y)$ i wtedy przestrzeń operatorów ograniczonych również tworzy uporządkowaną przestrzeń wektorową.

3.4 Twierdzenie Perrona-Frobeniusa dla dodatnich operatorów zwartych

Jako poważniejsze zastosowanie teorii krat Banacha, udowodnimy abstrakcyjną wersję twierdzenia Perrona-Frobeniusa. Twierdzenie to dotyczy własności spektralnych, dlatego będziemy tu rozważać wyłącznie zespolone kraty Banacha. Z drugiej strony dotyczy ono operatorów dodatnich, zatem jak wytłumaczyliśmy powyżej, przypadek rzeczywisty można zawsze skompleksyfikować, a co więcej każdy przypadek zespolony jest de facto taką kompleksyfikacją, patrz Stwierdzenie 3.38.

Zacznijmy od opisu jak rezolwenta zachowuje się względem dodatniości.

Stwierdzenie 3.44. *Niech $0 \leq T \in B(X)$ i niech $r(T)$ będzie jego promieniem spektralnym. Wtedy*

- (1) *Rezolwenta $R(\lambda, T)$ jest dodatnia dla $\lambda > r(T)$.*
- (2) *Jeśli $|\lambda| > r(T)$, to dla każdego $f \in X$ zachodzi*

$$|R(\lambda, T)f| \leq R(|\lambda|, T)|f|. \quad (3.10)$$

DOWÓD. (1). Niech $\lambda > r(T)$. Przypomnijmy rozwinięcie w szereg Neumana (3.5)

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n.$$

Z dodatniości T oraz λ wynika dodatniość sum częściowych $\sum_{n=0}^N \lambda^{-(n+1)} T^n$. Zatem z domknięcia stożka wektorów dodatnich wynika dodatniość szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n$, czyli granicy ciągu sum częściowych.

(2). Drugi punkt wynika podobnie z nierówności trójkąta dla modułu i jego ciągłości

$$\begin{aligned} |R(\lambda, T)f| &= \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \lambda^{-(n+1)} T^n f \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |\lambda^{-(n+1)} T^n f| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |\lambda|^{-(n+1)} T^n |f| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{-(n+1)} T^n |f| = R(|\lambda|, T)|f|. \end{aligned}$$

□

Z podstawowych własności widma, patrz Twierdzenie 3.30, wynika, że widmo brzegowe

$$\sigma_{\text{per}}(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| = r(T)\}$$

jest niepustym zbiorem zwartym. Na ogół ten zbiór nie zawiera promienia spektralnego. W pierwszym kroku pokażemy, że zachodzi to jednak dla dowolnych operatorów dodatnich. Jest to kluczowy element klasycznego twierdzenia Perrona-Forbeniusa.

Twierdzenie 3.45. *Niech $r(T)$ będzie promieniem spektralnym dodatniego operatora T na kracie Banacha X . Wtedy $r(T) \in \sigma_{\text{per}}(T) \subseteq \sigma(T)$.*

DOWÓD. Rozważmy ciąg $\lambda_n = r(T) + \frac{1}{n}$. Wtedy $\lambda_n \in \rho(T)$ dla każdego n . W świetle Twierdzenia 3.31 jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, T)\| = \infty$, to ze zbieżności $\lambda_n \rightarrow r(T)$ wynika, że $r(T) \in \sigma(T)$. Jako, że widmo brzegowe jest niepuste, weźmy $\alpha \in \sigma(T)$ takie, że $|\alpha| = r(T)$ i zdefiniujmy $\mu_n = \frac{\alpha \lambda_n}{|\alpha|}$. Stąd $\mu_n \in \rho(T)$ i $\mu_n \rightarrow \alpha$. Znowu korzystając z Twierdzenia 3.31 otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\mu_n, T)\| = \infty$. Następnie dla każdego n wybierzmy wektor jednostkowy $z_n \geq 0$, patrz Stwierdzenie 3.40, spełniający $\|R(\mu_n, T)\| \geq \frac{1}{2} \|R(\mu_n, T)\|$. Wtedy ze wzoru (3.10), $|R(\lambda, T)z| \leq R(|\lambda|, T)|z|$, czyli $|R(\mu_n, T)z_n| \leq R(\mu_n, T)|z_n|$ i też

$$\|R(\mu_n, T)\| \geq \|R(\mu_n, T)|z_n|\| \geq \|R(\mu_n, T)z_n\| \geq \frac{1}{2} \|R(\mu_n, T)\|,$$

co dowodzi tezy. □

Przypomnijmy, że liczbę zespoloną $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy *wartością własną* operatora $T : X \rightarrow X$, jeśli istnieje niezerowy wektor $x \in X$ spełniający równanie $Tx = \lambda x$. Wtedy x nazywamy *wektorem własnym* operatora T odpowiadającym wartości własnej λ . Zbiór własności własnych operatora T jest niczym innym jak jego widmem punktowym $\sigma_p(T)$. Widmo punktowe zdefiniowaliśmy jako zbiór takich $\lambda \in \mathbb{C}$, dla których operator liniowy $\lambda I - T$ nie jest różnowartościowy. Ale $\lambda I - T$ nie jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy jego jądro $\ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$ jest nietrywialne, czyli gdy λ jest wektorem własnym. Reasumując

$$\sigma_p(T) = \{ \text{wartości własne operatora } T \} \subseteq \sigma(T)$$

jest ważnym podzbiorem widma.

Kluczowym elementem tezy Twierdzenie Perrona - Frobeniusa jest to, że promień spektralny nie tylko należy do widma, ale że jest jego wartością własną, której odpowiada dodatni wektor własny. Aby uzyskać tę dodatkową własność w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych, potrzebujemy dodatkowego założenia, że rozważany operator jest zwarty. W ten sposób otrzymujemy następującą wersję interesującego nas twierdzenia, którą w tej postaci udowodnili Krein i Rutman [15].

Twierdzenie 3.46 (Twierdzenie Perrona - Frobeniusa na kratkach Banacha). *Jeśli operator dodatni $T : X \rightarrow X$ na kracie Banacha X jest zwarty i jego promień spektralny jest dodatni $r(T) > 0$, to $r(T)$ jest wartością własną operatora T dla dodatniego wektora własnego.*

DOWÓD. Załóżmy, że promień spektralny operatora T jest dodatni $r(T) > 0$ i rozważmy ciąg $\lambda_n = r(T) + \frac{1}{n}$. Wtedy dla n dążących do nieskończoności $\lambda_n \rightarrow r(T)$ i $\|R(\lambda_n, T)\| \rightarrow \infty$. Co więcej dla każdego n istnieje z_n o normie $\|z_n\| = 1$ takie, że $\|R(\lambda_n, T)z_n\| \geq \frac{1}{2}\|R(\lambda_n, T)\|$. Zdefiniujmy $x_n = \frac{R(\lambda_n, T)z_n}{\|R(\lambda_n, T)z_n\|}$, wtedy x_n jest wektorem, którego norma $\|x_n\| \geq \frac{1}{2}$. Z przekształceń

$$Tx_n - r(T)x_n = (\lambda_n - r(T))x_n + Tx_n - \lambda_n x_n = \frac{x_n}{n} - \frac{z_n}{\|R(\lambda_n, T)z_n\|}$$

otrzymujemy $\|Tx_n - r(T)x_n\| \rightarrow 0$, przy n dążącym do nieskończoności. Na mocy zwartości operatora T , ciąg $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ma podciąg zbieżny, który oznaczmy również przez $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ostatecznie z rozważań powyżej, stąd, że $r(T) > 0$ i ponieważ $\|x_n\| \geq 1$ otrzymujemy, że granica $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x > 0$ spełnia $Tx = r(T)x$. $\square$

Twierdzenie 3.46 w przypadku skończenia wymiarowym sprowadza się do klasycznej wersji Twierdzenia Perrona-Frobeniusa wyrażonego w języku macierzy. Macierz kwadratową $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ możemy traktować jako operator liniowy $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, którego działanie jest zadane jako mnożenie macierzy przez wektor

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Skoro $\mathbb{C}^n$ ma skończony wymiar, to każdy operator na tej przestrzeni ma skończony rząd, a więc jest operatorem zwartym, patrz Twierdzenia 3.16. Ponadto, w przypadku macierzy stosuje się następującą nomenklaturę:

- Mówimy, że macierz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ jest dodatnia, gdy wszystkie jej elementy są dodatnie $a_{i,j} \geq 0$. Zauważmy, że jest to równoważne temu, że operator $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest dodatni, gdzie $\mathbb{C}^n$ rozpatrujemy jako kratę wektorową z naturalnym porządkiem.

- Liczbę zespoloną $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy *wartością własną macierzy*, jeśli dla pewnego niezerowego wektora x spełnione jest równanie macierzowe $Ax = \lambda x$. Wtedy wektor x nazywamy *wektorem własnym macierzy A* . Zatem wartość własna i wektor własny macierzy są niejako zdefiniowane jako wartość własna i wektor własny operatora odpowiadającego macierzy A .
- *Promień spektralny macierzy A* jest to maksimum modułów jej wartości własnych, czyli liczba $r(A) = \max_{\lambda \in \sigma_p(A)} |\lambda|$. Promień spektralny operatora $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, odpowiadającego macierzy A , jest zdefiniowany jako maksimum po całym widmie $\sigma(A)$. Ale dla operatorów na przestrzeniach skończonego wymiaru $\sigma_p(A) = \sigma(A)$, patrz Twierdzenie 3.32. Czyli pojęcie promienia spektralnego dla macierzy i operatorów są zgodne.

Powyższa dyskusja pokazuje, że Twierdzenie 3.46 w przypadku macierzowym można wyrazić w następującej formie

Wniosek 3.47 (Twierdzenie Perrona-Frobeniusa dla macierzy). *Jeśli wszystkie elementy macierzy kwadratowej A są dodatnie, to promień spektralny macierzy A jest jej wartością własną i odpowiadający jej wektor własny ma współrzędne dodatnie.*

Przykład 3.48. Rozważmy dodatnią macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aby wyznaczyć jej wartości własne, musimy rozwiązać równanie $(A - \lambda I)x = 0$ dla $x \neq 0$, czyli znaleźć takie $\lambda \in \mathbb{C}$, dla których macierz $A - \lambda I$ nie jest odwracalna. Z obliczeń

$$0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 1 = -(\lambda - 1) \left(\lambda + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(\lambda + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)$$

otrzymujemy więc, trzy wartości własne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ oraz $\lambda_3 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Czyli promień spektralny macierzy A wynosi

$$r(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 1.$$

Wobec tego promień spektralny $r(A)$ jest wartością własną macierzy A .

Aby znaleźć wektory własne v_1, v_2, v_3 odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ macierzy A rozwiążemy równania macierzowe

$$(A - \lambda_j I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_j & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \\ v_{j3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pamiętając, że wektory własne nie mogą być zerowe $v_j \neq 0$ dla każdego $j = 1, 2, 3$. Zatem dla każdego $j = 1, 2, 3$ musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} -\lambda_j v_{j1} + v_{j2} = 0 \\ -\lambda_j v_{j2} + v_{j3} = 0 \\ v_{j1} - \lambda_j v_{j3} = 0 \end{cases}.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & \lambda_2 &= -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \lambda_3 &= -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \begin{cases} v_{11} - v_{13} = 0 \\ v_{12} - v_{13} = 0 \end{cases} & \begin{cases} v_{21} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}v_{23} = 0 \\ v_{22} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}v_{23} = 0 \end{cases} & \begin{cases} v_{31} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}v_{33} = 0 \\ v_{32} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}v_{33} = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Teraz w przypadku wartości własnej równej promieniowi spektralnemu $\lambda_1 = r(A) = 1$ łatwo jest tak dobrać zmienną wolną w układzie równań, aby otrzymać wektor dodatni $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Zatem jak mogliśmy się spodziewać wszystko zgadza się z Twierdzeniem Perrona-Frobeniusa dla macierzy. Zauważmy dodatkowo, że dla pozostałych wartości własnych nie możliwe jest otrzymanie wektorów własnych dodatnich poprzez odpowiednie dobranie zmiennych wolnych. Musielibyśmy znaleźć $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dla którego $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\alpha \in \mathbb{R}$. Wektorami własnymi dla wartości własnych λ_2 oraz λ_3 mogą być na przykład $v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

W powyższym przykładzie macierz jest dodatnia i wyliczenia są zgodnie z Twierdzeniem Perrona-Frobeniusa. Zauważmy, że dla ogólnych macierzy promień spektralny nie musi być wartością własną, a nawet gdy jest wartością własną, to jej wektory własne nie muszą być dodatnie.

Przykład 3.49. Rozważmy macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z obliczeń

$$0 = \det(A - I\lambda) = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda + 1) \left(\lambda - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right) \left(\lambda - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)$$

otrzymujemy trzy wartości własne $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ oraz $\lambda_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Stąd promień spektralny

$$r(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 1,$$

zatem $r(A)$ nie jest wartością własną macierzy A . W tym przypadku mamy do rozwiązania równania macierzowe

$$\begin{bmatrix} -\lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_j & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \\ v_{j3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

przy założeniu, że $v_j \neq 0$ dla każdego $j = 1, 2, 3$. Otrzymujemy stąd układ równań

$$\begin{cases} -\lambda_j v_{j1} + v_{j2} = 0 \\ -\lambda_j v_{j2} + v_{j3} = 0 \\ -v_{j1} - \lambda_j v_{j3} = 0 \end{cases},$$

k który dla poszczególnych wartości własnych przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 & \lambda_2 &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} & \lambda_3 &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \begin{cases} v_{11} - v_{13} = 0 \\ v_{12} + v_{13} = 0 \end{cases} & \begin{cases} v_{21} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}v_{23} = 0 \\ v_{22} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}v_{23} = 0 \end{cases} & \begin{cases} v_{31} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}v_{33} = 0 \\ v_{32} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}v_{33} = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Dla tak wybranej macierzy A wszystkie wektory własne są niedodatnie i mogą wynosić na

przykład $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Przykład 3.50. Rozważmy macierz

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Z obliczeń

$$0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda - i)(\lambda + i)$$

wnioskujemy, że jej wartości własne wynoszą $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = i$ oraz $\lambda_3 = -i$. Wtedy promień spektralny jest jedną z wartości własnych $r(A) = \max\{|2|, |i|, |-i|\} = 2 = \lambda_1$. Aby znaleźć wektory własne rozwiążmy równania macierzowe $(A - \lambda_j I)v = 0$, czyli

$$\begin{bmatrix} i - \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & -i - \lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \\ v_{j3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

przy założeniu, że wektory własne nie mogą być zerowe $v_j \neq 0$ dla każdego $i = 1, 2, 3$. W ten sposób dla każdego $j = 1, 2, 3$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} (i - \lambda_j)v_{j1} + v_{j2} = 0 \\ (2 - \lambda_j)v_{j2} = 0 \\ (i + \lambda_j)v_{j3} = 0 \end{cases}.$$

Stąd wektor własny odpowiadający promieniowi spektralnemu $r(A) = \lambda_1 = 2$ musi spełniać układ równań

$$\begin{cases} (i-2)v_{11} + v_{12} = 0 \\ v_{13} = 0 \end{cases}.$$

Natomiast nie istnieje $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ taka, że $(i-2)\alpha \in \mathbb{R}$, więc wektor v_1 jest niedodatni. Zatem wektor własny odpowiadający promieniowi spektralnemu może wynosić na przykład

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{2+i}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dla pozostałych wartości własnych układy równań upraszczają się do równań $v_{22} = v_{23} = 0$ oraz $v_{31} = v_{32} = 0$. Czyli dla $\lambda_2 = i$ oraz $\lambda_3 = -i$ można wybrać dodatnie wektory własne

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Teraz pokażemy na przykładzie, że w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych może się zdarzyć tak, że zwarty operator dodatni nie posiada wartości własnych. Na mocy Twierdzenia 3.46 jest to możliwe jedynie, gdy $r(T) = 0$, czyli gdy widmo $\sigma(T) = \{0\}$ składa się jedynie z zera. Operatory dla których $r(T) = 0$ nazywa się *quasi-nilpotentnymi*.

Przykład 3.51. Rozważmy operator *Volterry* na przestrzeni funkcji ciągłych, tzn. operator $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ zadany wzorem

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Zauważmy, że T jest operatorem całkowym z jądrem $k(t, s) = 1_{[0, t]}(s)$ (operator Volterry jest chyba najbardziej znanym przykładem operatora całkowego). W szczególności, T jest operatorem zwartym, patrz Przykład 3.20. Dodatkowo, ponieważ całka z dodatniej funkcji przyjmuje wartości dodatnie, T jest operatorem dodatnim. Jednakże ten operator nie ma żadnych wartości własnych. Aby to wykazać, założymy nie wprost, że dla pewnej niezerowej funkcji $0 \neq x \in C([0, 1])$ oraz liczby $\lambda \in \mathbb{C}$ mamy $Tx = \lambda x$. Czyli x jest wektorem własnym operatora T przy wartości własnej λ . To znaczy dla każdego $t \in [0, 1]$

$$\int_0^t x(s)ds = \lambda x(t). \quad (3.11)$$

Różniczkując (3.11) stronami i korzystając z Podstawowego Twierdzenia Rachunku Całkowego (patrz np. [8]) otrzymujemy

$$x(t) = \lambda x'(t).$$

Gdy $\lambda = 0$, to równanie sprowadza się do $x(t) = 0$, co daje sprzeczność z założeniem, że $x \neq 0$. Zatem $\lambda = 0$ nie jest wartością własną operatora T . Załóżmy teraz, że $\lambda \neq 0$.

Wtedy rozwiązaniem ogólnym powyższego równania różniczkowego jest funkcja postaci $x(t) = Ce^{\frac{t}{\lambda}}$, gdzie C jest dowolną stałą. Z tym, że założyliśmy wcześniej, że $x \neq 0$, zatem również stała C musi być różna od 0. Zauważmy jednak, że dla $t = 0$, $\lambda x(0) = \int_0^0 x(s)ds = 0$. Czyli $0 = Ce^{\frac{0}{\lambda}}$, a to jest możliwe tylko, gdy $C = 0$. Otrzymujemy sprzeczność.

Powyżej wykazany brak niezerowych wartości własnych wynika również z faktu, że $r(T) = 0$, co pokażemy teraz. Na mocy Przykładu 3.20 operator T jest ograniczony, więc promień spektralny obliczymy korzystając z formuły (3.3). W pierwszej kolejności wyprowadzimy wzór na operator Volterry n -krotnie złożony T^n . Zauważmy, że dla $n = 2$ mamy

$$(T^2)(t) = T \left(\int_0^t x(s)ds \right) (t) = \int_0^t \int_0^{s_1} x(s_2)ds_2ds_1.$$

i postępując w ten sposób, indukcyjnie, dostajemy

$$(T^n x)(t) = \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} x(s_n)ds_nds_{n-1} \cdots ds_1.$$

dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Teraz obliczymy normę tego operatora

$$\|T^n\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|T^n x\|_\infty.$$

W pierwszej kolejności dowiedzimy indukcyjnie, że dla $x \equiv 1$ mamy

$$(T^n x)(t) = \frac{t^n}{n!} \quad (3.12)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dla $n = 1$ mamy $(Tx)(t) = \int_0^t ds = \frac{t}{1}$, czyli wzór zachodzi. Załóżmy indukcyjnie, że $(T^{n-1}x)(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wtedy

$$(T^n x)(t) = T \left(\frac{(\cdot)^{n-1}}{(n-1)!} \right) (t) = \int_0^t \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} ds = \frac{t^n}{n!}.$$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej formuła (3.12) jest spełniona. Stąd

$$\|T^n\| \geq \|T^n \cdot 1\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Aby oszacować normę operatora T z góry zauważmy, że z monotoniczności całki mamy

$$\begin{aligned} |T^n x(t)| &\leq \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} |x(s_n)| ds_nds_{n-1} \cdots ds_1 \leq \\ &\leq \|x\|_\infty \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_nds_{n-1} \cdots ds_1 = \|x\|_\infty \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

czyli $\|T^n\| \leq \frac{1}{n!}$. Wobec tego $\|T^n\| = \frac{1}{n!}$. Zatem promień spektralny operatora Volterry wynosi zero:

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

Czyli w tym przypadku nie są spełnione założenia Twierdzenia 3.46.

Inspiracja do konstrukcji następnego przykładu została zaczerpnięta z dyskusji na forum Math Stack Exchange: Finding the spectrum of integral operator, <https://math.stackexchange.com/questions/1739652/finding-the-spectrum-of-integral-operator> (dostęp: 29.06.2025).

Przykład 3.52. Rozważmy operator całkowy $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$:

$$(Kx)(t) = \int_0^1 k(t, s)x(s)ds$$

z jądrem $k(t, s) = \min\{t, s\}$ dla $0 \leq s, t \leq 1$. Ponieważ całka z dodatniej funkcji przyjmuje wartości dodatnie, T jest operatorem dodatnim. Dodatkowo zwartość operatora T wynika z Przykładu 3.20. Wartości własne obliczymy znajdując liczby zespolone $\lambda \in \mathbb{C}$, które dla $x \neq 0$ spełniają równanie

$$\int_0^1 k(t, s)x(s)ds = \lambda x(t) \quad (3.13)$$

dla każdego $t \in [0, 1]$. Zauważmy, że jądro możemy przedstawić równoważnie w postaci

$$\min\{t, s\} = \begin{cases} s, & \text{gdy } s \leq t \\ t, & \text{gdy } s > t \end{cases} = \begin{cases} s, & \text{gdy } s \in [0, t] \\ t, & \text{gdy } s \in (t, 1] \end{cases}.$$

Zatem wyrażenie (3.13) przybiera formę

$$\int_0^t sx(s)ds + t \int_t^1 x(s)ds = \lambda x(t). \quad (3.14)$$

Załóżmy, że $\lambda \neq 0$. Teraz w świetle Podstawowego Twierdzenia Rachunku Całkowego, dwukrotnie różniczkując (3.14) otrzymujemy $tx(t) + \int_t^1 x(s)ds - tx(t) = \lambda x'(t)$, a stąd

$$\int_t^1 x(s)ds = \lambda x'(t) \quad (3.15)$$

$$-x(t) = \lambda x''(t). \quad (3.16)$$

Dodatkowo z równań (3.14) i (3.15) wstawiając odpowiednio $t = 0$ i $t = 1$, mamy $x(0) = 0$ i $x'(1) = 0$. Dostaliśmy w ten sposób równanie różniczkowe $x'' + \frac{1}{\lambda}x = 0$, z warunkami początkowymi $x(0) = 0$ oraz $x'(1) = 0$. Stąd wyliczamy (patrz np. [11]), że rozwiązaniem ogólnym jest $x(t) = C_1 \cos \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + C_2 \sin \frac{t}{\sqrt{\lambda}}$. Natomiast warunek początkowy $x(0) = 0$ implikuje, że $C_1 = 0$, a warunek $x'(1) = 0$ oznacza, że $\cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$, czyli $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wobec tego wartości własne i odpowiadające im wektory (funkcje) własne operatora T wyrażają się wzorami

$$\lambda_k = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}, \quad x_k(t) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2}t \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

W przypadku $\lambda = 0$ z równania (3.16) wynika, że $x \equiv 0$. Zatem $\lambda = 0$ nie jest wartością własną operatora T .

Teraz ponieważ operator T jest zwarty, to na mocy Twierdzenia 3.32(1) widmo wynosi

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} = \left\{ \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} : k \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Na mocy wzoru (3.6) (i zwartości widma) promień spektralny operatora T jest równy największemu modułowi wartości spektralnej. Zatem

$$r(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \max_{k \in \mathbb{N}} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Czyli promień spektralny jest równy wartości własnej $\lambda_0 = \frac{4}{\pi^2}$. Ponadto odpowiadający jej wektor własny wyraża się wzorem

$$x_0(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad \text{dla } t \in [0, 1].$$

Zauważmy, że funkcja ta zgodnie z Twierdzeniem Perron-Frobeniusa jest na przedziale $[0, 1]$ nieujemna (dodatnia).

3.4.1 Zastosowanie do operatorów niedodatnich

Twierdzenie Perrona - Frobeniusa dotyczy operatorów dodatnich, jednak dzięki przytoczonym dalej Twierdzeniom z książki [16], w niektórych przypadkach możemy zastosować Twierdzenie Perrona - Frobeniusa do modułów operatorów niedodatnich.

Przypomnijmy, że zbiór nazywamy *całkowicie ograniczonym*, gdy można go pokryć skończoną ilością kul o ustalonym promieniu.

Lemat 3.53. *Jeżeli A jest niepustym, całkowicie ograniczonym podzbiorem M -przestrzeni X , to zbiór $D = \{\sup\{a_1, a_2, \dots, a_n\} : a_1, a_2, \dots, a_n \in A, n \in \mathbb{N}\}$ wszystkich skończonych supremów zbioru A jest całkowicie ograniczony. Ponadto $\sup A$ istnieje w X i zawiera się w domknięciu $\overline{\sup A}$.*

DOWÓD. W świetle Twierdzenia 2.20 możemy utożsamić X z $C(M)$. Wtedy A odpowiada niepustemu, całkowicie ograniczonemu podzbiorkowi $C(M)$. Co na mocy Lematu 3.19 oznacza to, że A jest normowo ograniczony i równomiernie ciągły.

Rozważmy teraz $g \in D$ i wybierzmy funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$, tak aby spełniały formułę $g = f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_n$. Z równomiernej ciągłości A na M wynika, że dla $\varepsilon > 0$ i $m \in M$ istnieje otoczenie V punktu m takie, że nierówność $|f(t) - f(m)| \leq \varepsilon$ zachodzi dla każdego $t \in V$ i $f \in A$. Zatem z nierówności

$$|g(t) - g(m)| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} |f_i(t) - f_i(m)|$$

wynika $|g(t) - g(m)| \leq \varepsilon$ dla każdego $t \in V$ i dla każdego $g \in D$. Stąd D jest również równomiernie ciągły na M i ponieważ D jest ograniczony z Lematu 3.19, D jest całkowicie ograniczony.

Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ rodzinę skończonych podzbiorów zbioru A uporządkowaną przez $\subseteq$ i przez $g_\alpha = \sup \alpha$ dla każdego $\alpha \in \mathcal{A}$. Wtedy $\{g_\alpha\}$ jest ciągiem rosnącym. Zatem z zwartości $\overline{D}$ istnieje podzbiór $\{g_\alpha\}$ zbieżny w normie do $g \in \overline{D}$. Więc $\sup A = \sup D = \sup\{g_\alpha\} = g$. $\square$

Twierdzenie 3.54. *Niech $T : X \rightarrow Y$ będzie operatorem zwartym, odwzorowującym kratę Banacha X w M -przestrzeń Y . Wtedy moduł operatora T istnieje i jest operatorem zwartym. Ponadto, na stożku dodatnim X_+ przedstawia się formułą*

$$|T|(x) = \sup_{|y| \leq x} |Ty| \quad (3.17)$$

i przestrzeń wektorowa wszystkich operatorów zwartych $K(X, Y)$ jest kratą Banacha.

DOWÓD. Niech $x \in X_+$, wtedy $T[-x, x]$ jest całkowicie ograniczony w Y i z Lematu 3.53

$$|T|(x) = \sup_{|y| \leq x} |Ty| = \sup T[-x, x]$$

istnieje w Y . Aby pokazać, że tak zdefiniowane $|T|$ jest supremum T i $-T$ zauważmy najpierw, że $T \leq |T|$ i $-T \leq |T|$ w $L(X, Y)$. Załóżmy teraz, że $\pm T \leq R$ w $L(X, Y)$. Oczywiście R jest operatorem dodatnim. Dla $|y| \leq x$, mamy

$$Ty = Ty_+ - Ty_- \leq Ry_+ + Ry_- = R|y| \leq Rx.$$

Zatem $|T|(x) \leq R(x)$, dla każdego $x \in X_+$, czyli $|T| = T \vee (-T)$ w $L(X, Y)$.

Niech teraz U będzie domknięciem kuli jednostkowej w X . Aby dowieść, że operator $|T|$ jest zwarty, zauważmy, że jeśli A jest zbiorem wszystkich skończonych supremów $T(U)$, to z Lematu 3.53 domknięcie $\overline{A}$ jest zwarte. Zatem znowu z Lematu 3.53, mamy $|T|(x) \in \overline{A}$ dla każdego $x \in U_+$. Stąd $|T|(U_+) \subseteq \overline{A}$, a więc operator $|T|$ jest zwarty.

Pozostaje wykazać, że przestrzeń operatorów zwartych $K(X, Y)$ jest kratą Banacha. Zauważmy, że kombinacja liniowa operatorów zwartych jest operatorem zwartym, wprost z Twierdzenia 3.21 wynika zupełność $K(X, Y)$ oraz wzory $T \vee S = \frac{1}{2}(T + S + |T - S|)$, $T \wedge S = \frac{1}{2}(T + S - |T - S|)$ z Lematu 1.41 definiują operacje kratowe. Zatem $K(X, Y)$ jest kratą Banacha. $\square$

Wykorzystując dualność między M -przestrzeniami i L -przestrzeniami, [19, Theorem 7, strona 25], z powyższego twierdzenia można wywnioskować następującą wersję dualną.

Twierdzenie 3.55. *Moduł operatora zwartego $T : X \rightarrow Y$, odwzorowującego L -przestrzeń X w kratę Banacha Y jest zwarty. Ponadto zbiór wszystkich operatorów zwartych na X w Y tworzy kratę Banacha.*

Dowód tego twierdzenia znajduje się w książce [16]. Powyższe Twierdzenia w połączeniu z Twierdzeniem Perrona-Frobeniusa możemy zastosować w przypadku, gdy $X = Y$ jest M -przestrzenią lub L -przestrzenią, czyli na przykład do operatorów na przestrzeni $C[a, b]$ lub $L^1[a, b]$. Ponadto, skoro na przestrzeniach skończone wymiarowe wszystkie normy są równoważne, a widmo operatora nie zależy od normy (jest zdefiniowane w sposób algebraiczny), więc możemy je również zastować dla macierzy

Przykład 3.56. Jak wygląda moduł macierzy A ? Obliczenie takiego modułu ze wzoru (3.17) wymaga trochę wysiłku. W tym przypadku, może lepiej to zrobić z definicji. Przypomnijmy iż macierz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ jest dodatnia, gdy wszystkie jej współczynniki są dodatnie (nieujemne). Oznaczmy przez $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})_+$ stożek macierzy dodatnich. Zadaje on na $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ strukturę kraty wektorowej, która jest izomorficzna z kratą wektorową $\mathbb{C}^{n^2}$ z naturalną strukturą zadaną po współrzędnych. W szczególności moduł takiego wektora, to wektor składający się z modułów. W ten sposób otrzymujemy, że moduł macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ to macierz $|A|$, której współczynniki są modułami współczynników macierzy A . Czyli

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} |a_{11}| & |a_{12}| & \cdots & |a_{1n}| \\ |a_{21}| & |a_{22}| & \cdots & |a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |a_{n1}| & |a_{n2}| & \cdots & |a_{nn}| \end{bmatrix}.$$

Zatem na przykład moduł macierzy z Przykładu 3.49 jest macierzą z Przykładu 3.48, czyli

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jak obliczyliśmy w Przykładzie 3.49, rozkład spektralny macierzy A , czyli jej wartości własne wraz z odpowiadającymi jej wektorami własnymi przedstawia się jak następuje:

$$\lambda_1 = -1, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Natomiast analogiczny rozkład dla $|A|$, patrz Przykład 3.48, jest następujący

$$\mu_1 = 1, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, w_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mu_3 = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, w_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Można tu zauważyć zadziwiające zależności. Po pierwsze

$$r(A) = r(|A|) \quad \text{oraz} \quad |\sigma(A)| = |\sigma(|A|)| = \{1\}.$$

Po drugie niedodatnia część widma macierzy dodatniej $|A|$ pokrywa się z pewną częścią widma macierzy $\sigma(A)$, tzn. $\lambda_2 = \mu_2$ oraz $\lambda_3 = \mu_3$. Wektory własne dla odpowiednich wartości własnych λ_i oraz μ_i różnią się tylko na drugiej współrzędnej i są przeciwieństwami swoich sprzężeń (macierze A oraz $|A|$ również różnią się na jednej współrzędnej). Ponadto moduły wszystkich wybranych wektorów własnych pokrywają się z niedodatnim wektorem własnym v_1 odpowiadającym maksymalnej dodatniej wartości własnej $\mu_1 = r(|A|)$ macierzy $|A|$.

Sprawdźmy, czy podobne zależności zachodzi również w przypadku macierzy z Przykładu 3.50. Czyli rozważmy macierze

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad |A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozkład spektralny macierzy A obliczony w Przykładzie, to

$$\lambda_1 = 2, v_1 = \begin{bmatrix} \frac{2+i}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = i, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = -i, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczmy zatem teraz rozkład spektralny macierzy $|A|$. Z równania charakterystycznego

$$0 = \det(|A| - \mu I) = (1 - \mu)^2(2 - \mu)$$

otrzymujemy wartości własne $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$. Zauważmy, że otrzymane wartości własne $|A|$ są modułami wartości własnych macierzy A . Promień spektralny nie zmienia się

$$r(|A|) = \max\{|\mu_1|, |\mu_2|, |\mu_3|\} = 2 = r(A)$$

i tak jak w Przykładzie 3.50, jest wartością własną macierzy $|A|$. Następnie w celu znalezienia wektorów własnych rozwiązujemy równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 1 - \mu_j & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \mu_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \mu_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{j1} \\ w_{j2} \\ w_{j3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

przy założeniu, że wektory własne nie mogą być zerowe. Otrzymujemy stąd układ równań

$$\begin{cases} (1 - \mu_j)w_{j1} + w_{j2} = 0 \\ (2 - \mu_j)w_{j2} = 0 \\ (1 - \mu_j)w_{j3} = 0 \end{cases},$$

z którego wnioskujemy, że teraz wszystkie wektory własne, w tym wektor własny odpowiadający promieniowi spektralnemu, mogą być dodatnie - mamy przykładowo rozkład spektralny

$$\mu_1 = 2, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = 1, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mu_3 = 1, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem w tym przypadku wektory własne v_1 oraz w_2 odpowiadające wartości własnej o największym module znacząco się różnią. Natomiast nieco zaskakująca jest równość pozostałych par wektorów własnych $v_2 = w_2, v_3 = w_3$.

W świetle powyższego przykładu widzimy w zasadzie jedną prawidłowość, że promień spektralny macierzy A oraz $|A|$ pokrywają się. Można więc zadać ogólne pytanie:

Dla jakich operatorów zachodzi równość $r(T) = r(|T|)$?

Pytanie te można zadać na przykład dla operatorów całkowych. Jednakże próbę odpowiedzi na to pytanie, pozostawimy na dalsze badania.

Przykład 3.57. Powyższy przykład, jak i intuicja, podpowiadają, że moduł operatora całkowego $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ z jądrem całkowym $k(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$, patrz Przykład 3.20, powinien być operatorem całkowym z jądrem całkowym $|k(s, t)|$ będącym modułem wyjściowego jądra k . Tak rzeczywiście jest. To znaczy

$$Tx(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds \implies |T|x(t) = \int_a^b |k(t, s)|x(s)ds$$

Jednakże dowód tego faktu jest nietrywialny. Nawet do tego stopnia, że pierwsze dowody tego twierdzenia podane przez Krasnosielksiego, Zabrejkę, Pustylnika i Sobolewskiego były niepoprawne, patrz [26].

Bibliografia

- [1] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory*, Graduate Studies in Mathematics **50**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [2] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press, Orlando, 1985.
- [3] J. Banasiak, *Banach Lattices in Applications*, Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Pretoria, Pretoria, rok nieznany.
- [4] K. Bardadyn, B. Kwaśniewski and A. McKee, *Banach algebras associated to twisted étale groupoids: inverse semigroup disintegration and representations on L^p -space*, Preprint, arXiv:2303.09997.
- [5] F. Bohnenblust, *On axiomatic characterization of L^p spaces*, Duke Math. J. **6** (1940), 627–640.
- [6] P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [7] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics **96**, Springer, New York, 1990.
- [8] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, brak roku.
- [9] E. Gardella, *A modern look at algebras of operators on L^p -spaces*, Expo. Math., **39** (2021), 420–453.
- [10] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1978.
- [11] R. S. Guter, A. R. Janpolski, *Równania różniczkowe*, PWN, Warszawa, 1980.
- [12] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract L -spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. **42** (1941), 523–537.
- [13] S. Kakutani, *Concrete representations of abstract M -spaces*, Ann. of Math. **42** (1941), 994–1024.

- [14] M. Kosiek, *Kraty Banacha*, wykład monograficzny, Uniwersytet Jagielloński, brak daty.
- [15] M. G. Kreĭn, M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Amer. Math. Soc. Translation **1950**, no. 26, 128 s.
- [16] U. Krengel, *Über den Absolutbetrag stetiger linearer Operatoren und seine Anwendung auf ergodische Zerlegungen*, Math. Scand. **13** (1963), 151–187.
- [17] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York–Toronto, 1978.
- [18] B. K. Kwaśniewski, *Wykłady z analizy funkcjonalnej*, Uniwersytet w Białymstoku, dostęp online: <https://math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/teaching.html>, [dostęp: 29.06.2025].
- [19] H. E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.
- [20] E. J. McShane, *Integration*, Princeton University Press, New York, 1944.
- [21] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer, Berlin, 1991.
- [22] Math Stack Exchange, *Finding the spectrum of integral operator*, [online], [dostęp: 29.06.2025], dostępny w Internecie: <https://math.stackexchange.com/questions/1739652/finding-the-spectrum-of-integral-operator>.
- [23] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer, Berlin–New York, 1974.
- [24] W. Wnuk, *Banach Lattices with Order Continuous Norms*, PWN, Warszawa, 1999.
- [25] Wikipedia: Wolna encyklopedia, *Twierdzenie Perrona–Frobeniusa*, [online], [dostęp: 29.06.2025], dostępny w Internecie: https://en.wikipedia.org/wiki/Perron%E2%80%93Frobenius_theorem.
- [26] A. C. Zaanen, *The linear modulus of an integral operator*, Mém. Soc. Math. Fr. **31–32** (1972), 399–400.