Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki

Łukasz Stępkowski

# Ogólne twierdzenie Radona-Nikodyma i jego zastosowania

*Praca magisterska napisana*
*pod kierunkiem*
dr. hab. Bartosza Kwaśniewskiego

Białystok 2022

# Spis treści

# Wstęp

Twierdzenie charakteryzujące kiedy jedna miara posiada gęstość względem drugiej miary, znane obecnie jako *Twierdzenie Radona-Nikodyma*, zostało po raz pierwszy sformułowane w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$, w 1913 roku przez Johanna Radona, po czym zostało uogólnione na przypadek abstrakcyjnych miar w 1930 roku przez Ottona Nikodyma. Specjalista w dziedzinie teorii miary David Fremlin [5] uważa, że twierdzenie to znajduje się wśród sześciu najważniejszych wyników teorii miary. W trakcie studiów licencjackich i magisterskich poznajemy najbardziej znaną wersję Twierdzenia Radona-Nikodyma dla miar skończonych i $\sigma$-skończonych. Najczęściej wykorzystujemy je podczas studiowania rachunku prawdopodobieństwa i przedmiotów z nim związanych.

Niniejsza praca ma trzy głowne cele:

1) przegląd rezultatów otrzymanych przez matematyków podczas prac nad uogólnieniem Twierdzenia Radona-Nikodyma,

2) próba znalezienia najogólniejszej wersji Twierdzenia Radona-Nikodyma (dla miar niekoniecznie $\sigma$-skończonych),

3) zastosowanie otrzymanych wyników do operatorów w przestrzeniach $L_p$.

Ostatecznie w pracy można znaleźć dziewięć różnych wersji Twierdzenia Radona-Nikodyma, poczynając od klasycznego przypadu dla miar skończonych, gdzie przedstawimy trzy jakościowo różne dowody pokazujące silne związki Twierdzenia Radona-Nikodyma z różnymi zagadnieniami z zakresu teorii miary i całki, rachunku prawdopodobieństwa i analizy funkcjonalnej. Wykażemy mniej znaną wersję, kiedy jedynie miara dominująca jest $\sigma$-skończona i wychodząc całkowicie poza świat miar $\sigma$-skończoych omówimy twierdzenia Segala [18], Lewinów [11] i Ogólne Twierdzenie z quasi-funkcją (Twierdzenie 3.3). Ostatnie z wymienionych twierdzeń jest najogólniejszym, ponieważ zakłada tylko absolutną ciągłość dwóch dowolnych miar. Jednakże wtedy pojęcie pochodnej Radona-Nikodyma (gęstości) trzeba rozumieć nie jako funkcję, lecz jako *quasi-funkcję*. Quasi-funkcja jest pewną rodziną funkcji mierzalnych i można ją utożsamić z funkcją mierzalną wtedy i tylko wtedy, gdy z dokładnością do zbiorów miary zero supremum elementow quasi-funkcji jest mierzalne. Ma to zawsze miejsce, gdy rozpatrywane miary są *lokalizowalne*. Pojęcie lokalizowalności zostało rozpropagowane przez Segala [18], którego wynik często mylnie interpretuje się jako równoważność lokalizowalności miary z istnieniem pochodnej Radona-Nikodyma względem każdej miary absolutnie ciągłej. Problem polega jednak na tym, że Segal w [18] przez miarę rozumiał jej obcięcie do rodziny zbiorów o mierze skończonej. W języku ogólnych miar określonych na $\sigma$-algebrach sprowadza się to do założenia, że rozpatrywane miary są wspólnie semi-skończone (por. Definicja 3.27 i Twierdzenie 3.30). Ogólnie lokalizowalność nie jest warunkiem koniecznym na istnienie pochodnej Radona-Nikodyma. Jak wykazaliśmy, wystarczy założyć istnienie supremów mierzalnych oraz warunek *względnej semi-skończoności*, który jest słabszy niż wspólna semi-skończoność (patrz Twierdzenie 3.29).

Warunek względnej semi-skończoności (Definicja 3.5), jest uogólnieniem dobrze ukonstytuowanego pojęcia semi-skończoności i jest bardzo bliski warunkowi, który w pracy Lewinów [11] został nazwany *kompatybilnością*. Kompatybilność jest warunkiem koniecznym istnienia pochodnej Radona-Nikodyma. Jeśli miara dominowana jest skończona, to kompatybilność jest równoważna względnej semi-skończoności oraz istnieniu pochodnej Radona-Nikodyma. Wynika to z pracy [11], której główny wynik uogólniliśmy na przypadek, gdy dominowana miara jest $\sigma$-skończona (Twierdzenie 3.35).

Jako zastosowanie powyższych wyników do operatorów w przestrzeniach $L_p$ otrzymaliśmy m.in.:

a) Ogólną charakteryzację kiedy warunkowa wartość oczekiwana dla ustalonej funkcji istnieje oraz ogólny warunek, przy którym warunkową wartość oczekiwaną definiuje rzut na przestrzeni $L_1$ (Twierdzenia 4.3, 4.5). Jest to ważne na przykład dlatego, że otwiera to drogę do uogólnienia klasycznych charakateryzacji rzutów na przestrzeniach $L_p$ dla miar skończonych i $\sigma$-skończonych, otrzymanych przez Douglasa [4] i Ando [1];

b) Uogólniliśmy klasyczne Twierdzenie Ridge'a [14] charakteryzujące kiedy operator kompozycji jest ograniczony na przestrzeniach $L_p$ (Twierdzenie 4.7). Twierdzenie Ridga jest fundamentalnym faktem w teorii operatorów kompozycji. Nasze uogólnienie sugeruje, że całą teorię takich operatorów można sformułować na przestrzeniach $L_p$ z dowolną miarą (założnie $\sigma$-skończoności jest zbędne o ile pojęcie pochodnej Radona-Nikodyma zastąpi się przez quasi-pochodną Radona-Nikodyma);

c) Scharakteryzowaliśmy izometryczne ważone operatory kompozycji (Twierdzenie 4.18). Ten wynik jest wstępem do uogólnienia Twierdzenia Banacha-Lampertiego charakteryzującego izometrie na przestrzeniach $L_p$. Najogólniejsza znana dotąd wersja tego ważnego wyniku zachodzi dla miar lokalizowalnych, patrz [10], [6].

Struktura pracy przedstawia się następująco:

W pierwszym rozdziale zawarlismy podstawowe informacje takie jak definicje przestrzeni z miarą, oraz konstrukcję całki. Większość drugiego rozdziału poświęcona jest trzem różnym dowodom Twierdzenia Radona-Nikodyma dla miar skończonych, gdzie każdy z nich jest spojrzeniem na to twierdzenie z perspektywy innej dziedziny matematyki (czyli teorii miary, analizy funkcjonalnej i rachunek prawdopodobieństwa). Dalej omawiamy Twierdzenie Radona-Nikodyma dla miar $\sigma$-skończonych, a w szczególności wersję, gdzie jedynym założeniem, oprócz absolutnej ciągłości, jest $\sigma$-skończoność miary dominującej. Trzeci rozdział zaczyna się Ogólnym Twierdzeniem Radona-Nikodyma, a nasepnie przedstawiamy pojęcia semi-skończoności i lokalizowalności miar. Ostatnie dwa podrozdziały pokazują wyniki otrzymane przez Segala i Lewinów, oraz ich uogólnienia. Czwarty rozdział zawiera zastosowania otrzymanych wyników do operatorów w przestrzeniach $L_p$.

# Rozdział 1

# Preliminaria

## 1.1 Miara i całka

W całej pracy $\Omega$ będzie oznaczać pewien zbiór, a $\Sigma$ będzie $\sigma$-algebra podzbiorów $\Omega$. To znaczy $\Sigma$ jest niepustą rodziną podzbiorów zbioru $\Omega$, dla której $A \in \Sigma$ implikuje $\Omega \setminus A =: A' \in \Sigma$, oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ dla każdego ciągu $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$. Parę $(\Omega, \Sigma)$ nazywamy *przestrzenią mierzalną*. *Miarą* nazywamy funkcję $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ taką, że

$$\mu(\emptyset) = 0,$$
$$\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

dla każdej rodziny parami rozłącznych zbiorów $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ (pisząc „kwadratową sumę" $\bigsqcup$ mamy zawsze na myśli, że sumowane zbiory są parami rozłączne). *Przestrzenią z miarą* nazywamy trójkę $(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Jeżeli mamy dwie przestrzenie mierzalne $(\Omega, \Sigma)$ i $(M, \Psi)$ to funkcję $f : \Omega \to M$ nazwiemy *mierzalną*, gdy dla każdego $E \in M$ zachodzi $f^{-1}(E) \in \Sigma$. Innymi słowy, funkcja jest mierzalna, jeżeli przeciwobraz dowolnego zbioru mierzalnego jest mierzalny. Rozpatrując funkcje mierzalne $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o wartościach rzeczywistych standardowo za przestrzeń mierzalną na przeciwdziedzinie przyjmujemy $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, czyli $\mathbb{R}$ wraz $\sigma$-algebrą zbiorów borelowskich, tj. najmniejszą $\sigma$-algebrę zawierającą wszystkie zbiory otwarte. W niniejszej pracy będziemy również rozpatrywać funkcje mierzalne $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ przyjmujące wartość $\infty$. Standardową $\sigma$-algebrą na $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest najmniejsza $\sigma$-algebra zawierającą wszystkie zbiory otwarte w $\mathbb{R}$.

Teraz przypomnimy konstrukcję całki. Ustalmy przestrzeń z miarą $(\Omega, \Sigma, \mu)$. Całkę z funkcji charakterystycznej $f = \mathbb{1}_E$ zbioru mierzalnego $E \in \Sigma$ definiujemy jako

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu := \mu(E).$$

Kolejnym krokiem jest całka z nieujemnej *funkcji prostej*, czyli funkcji postaci $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$, gdzie $a_i > 0$ i $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Sigma$ są parami rozłączne. Poprzedni wzór i liniowość całki determinuje następujący wzór

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i).$$

Przyjmujemy tu standardowe konwencje, że $a_i \cdot (+\infty) = +\infty$, $+\infty + \infty = +\infty$ oraz $a_i \mu(A_i) = 0$ jeśli $\mu(A_i) = 0$ (nawet jeśli $a_i = +\infty$). Całkę z dowolnej nieujemnej funkcji mierzalnej $f : \Omega \to [0, +\infty]$ definiujemy jako

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu : 0 \leqslant s \leqslant f, \ s \text{ jest funkcją prostą} \right\}. \tag{1.1}$$

Ostatecznie, dowolną funkcję mierzalną $f$ możemy zapisać jako różnica dwóch nieujemnych funkcji mierzalnych. To znaczy

$$f = f^+ - f^-, \text{ gdzie } f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := |\min\{f, 0\}|.$$

Pozwala, to zdefiniować całkę z dowolnej funkcji mierzalnej wzorem

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

o ile poprawej stronie nie występuje symbol nieoznaczony $(+\infty) - (+\infty)$. Ogólnie powiemy, że funkcja mierzalna $f$ jest *całkowalna* jeżeli obie całki $\int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu$ i $\int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu$ są skończone. Jest to równoważne założeniu, że $\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$. W dowodach różnych własności całki często pokazujemy, że dana własność zachodzi dla funkcji prostej, nieujemnej funkcji mierzalnej, a na końcu dla dowolnej funkcji mierzalnej. Taki sposób dowodzenia nazywamy *metodą stopniowej komplikacji.*

Całkę z funkcji $f$ na podbiorze mierzalnym $A \in \Sigma$ definiujemy jako całkę z funkcji $f \cdot \mathbb{1}_A$. Dokładniej mówimy, że $f$ jest całkowalna na $A$ jeżeli funkcja $f \cdot \mathbb{1}_A$ jest całkowalna i piszemy wtedy $\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu$.

Jednym z najważniejszych twierdzeń teorii całki jest *Twierdzenie Leviego o zbieżności monotonicznej*, które mówi, że dla niemalejącego ciągu nieujemnych funkcji mierzalnych, całka z jego granicy jest granicą całek. Przy czym założenie o monotoniczności implikuje, że pojęcie granicy jest tu równoważne pojęciu supremum.

**Twierdzenie 1.1** (Leviego zbieżności monotonicznej)**.** *Niech* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *będzie ciągiem funkcji mierzalnych na* $\Omega$*. Jeżeli* $0 \leqslant f_1(\omega) \leqslant f_2(\omega) \leqslant \ldots \leqslant \infty$ *dla każdego* $\omega \in \Omega$*, to funkcja* $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ *jest mierzalna oraz*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu.$$

Dowód. Dowód twierdzenia można znaleźć na przykład w [16, 1.26]. □

**Uwaga 1.2.** Dla każdej nieujemnej funkcji mierzalnej $f : \Omega \to [0, +\infty]$ istnieje ciąg funkcji prostych $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \leqslant f$ oraz $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \lim_{n \to \infty} f_n$. Zatem w świetle Twierdzenia 1.1 definicję (1.1) możnaby zastąpić wzorem

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

## 1.2 Przestrzenie Banacha i operatory ograniczone

Na przestrzeni wektorowej $X$ nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ możemy określić *normę*, czyli funkcję $\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$ taką, że $\|x\| = 0 \iff x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ oraz $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, gdzie $x, y \in X$ i $\lambda \in \mathbb{F}$. Przestrzeń wektorową wyposażoną w normę nazywamy *przestrzenią unormowaną*. Jeżeli przestrzeń unormowana jest zupełna, czyli każdy ciąg Cauchy jest zbieżny, to taką przestrzeń nazwiemy *przestrzenią Banacha*.

Klasycznymi przykładami przestrzeni Banacha są *przestrzenie funkcji całkowalnych w p-tej potędze*. Niech $(\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie ustaloną przestrzenią z miarą oraz niech $p \in [1, +\infty)$. Mówimy, że funkcja $f : \Omega \to \mathbb{F}$ jest *całkowalna w p-tej potędzę*, gdy

$$\left( \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} =: \|f\|_p$$

jest wartością skończoną. Zbiór funkcji całkowalnych w $p$-tej potędze wraz z działanimi określonymi punktowo i funkcją $\| \cdot \|_p$ jest przestrzenią unormowaną, a nawet przestrzenią Banacha, o ile utożsamimy ze sobą funkcje równe sobie $\mu$-prawie wszędzie, patrz np. [12], [16]. Rzeczone przestrzenie Banacha oznaczamy $L_p(\mu)$. Przypomnijmy, że dwie funkcje $f, g : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ są sobie równe $\mu$-prawie wszedzie jeżeli są sobie równe poza zbiorem miary zero, czyli

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0.$$

Jest to relacja równoważności i gdy mówimy o $L_p(\mu)$, to tak naprawdę mamy ma myśli przestrzeń ilorazową względem relacji równości $\mu$-prawie wszędzie, a jej elementami są klasy abstrakcji. Jednak dla uproszczenia języka i notacji będziemy mówić o przestrzeni funkcji całkowalnych w p-tej potędze $L_p(\mu)$ i elementy będziemy nazywać funkcjami. Nierówność trójkąta w przestrzeniach $L_p(\mu)$ nazywana jest nierównością Minkowskiego. Kojelną nierównością dla tych przestrzeni jest *Nierówność Höldera*.

**Twierdzenie 1.3** (Nierówność Höldera)**.** *Jeżeli $p$ i $q$ są wykładnikami sprzężonymi (tzn. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leqslant p < \infty$) i $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$, to $fg \in L_1(\mu)$ oraz*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Dowód. Patrz [16, 3.8]. □

Ważną podklasą przestrzeni Banacha są przestrzenie Hilberta. Mianowicie, *przestrzeń Hilberta* to przestrzeń Banacha $H$ wyposażona w *iloczyn skalarny*, czyli funkcję $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{F}$, która jest dodatnio określona, liniowa w pierwszym argumencie i antysymetryczna:

$$\langle x, x \rangle \geqslant 0 \quad \text{i} \quad \langle x, x \rangle > 0 \quad \text{dla } x \neq 0,$$

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle,$$
$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle},$$

gdzie $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Co więcej, zakładmy tu, że norma w tej przestrzeni jest zadana przez iloczyn skalarny, to znaczy

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

dla dowolnego $x \in H$. Dla dowolnego iloczynu skalarnego powyższy wzór zadaje normę oraz zachodzi kluczowa *nierówność Schwartza*:

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Podstawowymi przykładami przestrzeni Hilberta są przestrzeń funkcji całkowalnych w kwadracie $L_2(\mu)$ z iloczynem skalarnym zadanym poprzez

$$\langle x, y\rangle = \int_\Omega x\overline{y}\,\mathrm{d}\mu$$

dla $x, y \in L_2(\mu)$. De facto (niezeorwa) przestrzeń $L_p(\mu)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$. Nierówność Schwartza dla przestrzeni $L_2(\mu)$ jest szczególnym przypadkiem nierówności Höldera.

Przez *operator liniowy* między dwiemami ustalonymi przestrzeniami unormowananymi $X, Y$ nad ciałem $\mathbb{F}$ rozumiemy odwzorowanie liniowe $T : X \to Y$, tzn. funkcję taką, że

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

dla każdego $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Mówimy, że operator liniowy $T$ jest *ograniczony* jeżeli istnieje stała $C \geqslant 0$, dla której $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ dla dowolnego $x \in X$. Najmniejszą z takich stałych nazywamy *normą operatora*, tzn.

$$\|T\| := \inf\{C \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant C\|x\| \text{ dla każdego } x \in X\}.$$

Równoważnie, norma operatora $T$ wyraża się wzorem $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$. Operator liniowy jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest odwzorowaniem ciągłym. Operatory liniowe przyjmujące wartości w ciele skalarów, tzn. gdy $Y = \mathbb{F}$, nazywamy *funkcjonałami*.

# Rozdział 2

# Twierdzenie Radona-Nikodyma dla miar sigma skończonych

W tym rozdziale omówimy podstawową wersję Twierdzenia Radona-Nikodyma dla miar skończonych. Przedstawimy trzy niezależne i całkowicie różne w swojej istocie dowody tego twierdzenia - dowód klasyczny wykorzystujący Twierdzenie Hahna o rozkładzie miary znakowej, dowód Von Neumanna opierający się na Twierdzeniu Riesza o reprezentacji funkcjonałów w przestrzeniach Hilberta, oraz dowód Samuelsa bazujący na pojęciu warunkowej wartości oczekiwanej.

Na koniec pokażemy jak Twierdzenia Radona-Nikodyma dla miar skończonych uogólnia się na przypadek, gdy miara dominowana jest dowolna, a miara dominująca jest $\sigma$-skończona.

## 2.1 Wprowadzenie

Na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$ można rozpatrywać wiele różnych miar. Twierdzenie Radona-Nikodyma charakteryzuje pary miar $\nu$, $\mu$, które są ze sobą związane relacją, którą symbolicznie można zapisać $d\nu = f_0 d\mu$, gdzie $f_0$ jest pewną funkcją mierzalną, a formalnie zdefiniujemy ją następująco.

**Definicja 2.1.** Niech $\nu$ i $\mu$ będą dowolnymi miarami na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$. Powiemy, że miara $\nu$ ma *gęstość*, czy też *pochodną Radona-Nikodyma względem miary* $\mu$ jeśli istnieje funkcja mierzalna $f_0 : \Omega \to [0, +\infty]$ taka, że

$$\nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu, \qquad \text{dla każdego } A \in \Sigma. \tag{2.1}$$

Piszemy wtedy $\frac{d\nu}{d\mu} := f_0$ i funkcję tę nazywamy *pochodną Radona-Nikodyma* miary $\nu$ względem $\mu$.

**Stwierdzenie 2.2.** *Dla dowolnych dwóch miar* $\nu$, $\mu$ *na przestrzeni mierzalnej* $(\Omega, \Sigma)$ *i dowolnej funkcji mierzalnej* $f_0 : \Omega \to [0, +\infty]$ *następujące warunki są równoważne*

*1)* $f_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$, *tzn.* $\nu(A) = \int_A f_0\, d\mu$ *dla każdego* $A \in \Sigma$,

*2) każda funkcja mierzalna* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *jest* $\nu$*-całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $f \cdot f_0$ *jest* $\mu$*-całkowalna i jeśli to zachodzi, to*

$$\int_\Omega f\, d\nu = \int_\Omega f \cdot f_0\, d\mu.$$

*W szczególności, jeśli powyższe równoważne warunki zachodzą, to odwzorowanie* $L_1(\nu) \ni f \mapsto f \cdot f_0 \in L_1(\mu)$ *jest izometrią liniową.*

Dowód. Dowód implikacji 2) $\Longrightarrow$ 1) jest łatwy; stosując 2) do funkcji $f = \mathbb{1}_A$ mamy

$$\nu(A) = \int_A \mathrm{d}\nu = \int_\Omega \mathbb{1}_A \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f \cdot f_0 \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot f_0 \mathrm{d}\mu = \int_A f_0 \mathrm{d}\mu.$$

Implikację 1) $\Longrightarrow$ 2) przeciwną dowiedziemy metodą stopniowej komplikacji. Załóżmy 1) i niech $f : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną.

(i) Niech $f = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$, gdzie $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$, $A_i \in \Sigma$, $a_i > 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Korzystając z 1) i liniowości całki mamy

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \mathrm{d}\nu &= \sum_{i=1}^n a_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int_A f_0 \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \cdot f_0 \mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \cdot f_0 \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \cdot f_0 \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(ii) Jeśli $f \leqslant 0$, to w świetle Uwagi 1.2 mamy $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, gdzie $f_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ jest funkcją prostą jak w przypadku (i), oraz ciąg $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ jest monotonicznie niemalejący. Jako że $f_0 \geqslant 0$, to ciąg $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ jest również niemalejący i $ff_0 = \lim_{n\to\infty} f_n f_0$. Zatem stosując dwukrotnie twierdzenie o zbieżności monotonicznej (Twierdzenie 1.1) oraz (i) mamy

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \cdot f_0 \mathrm{d}\mu = \\ = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \cdot f_0 \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \cdot f_0 \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(iii) Jeśli $f$ jest dowolna, to $f = f^+ - f^-$ i wtedy korzystając dwukrotnie z (ii) mamy

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \mathrm{d}\nu &= \int_\Omega f^+ \mathrm{d}\nu - \int_\Omega f^- \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f^+ f_0 \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- f_0 \mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega f^+ f_0 - f^- f_0 \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \cdot f_0 \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Teraz pokażemy, że jeśli te warunki zachodzą, to odwzorowanie $L_1(\nu) \ni f \mapsto f \cdot f_0 \in L_1(\mu)$ jest liniową izometrią. Z warunku 2) widzimy, że to odwzorowanie jest poprawnie określone. Liniowość tego odwzorowania jest oczywista. Przypomnijmy sobie, że $f_0$ jest funkcją nieujemną. Zatem

$$\|f \cdot f_0\|_1 = \int_\Omega |f \cdot f_0| \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f| \cdot f_0 \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f| \mathrm{d}\nu = \|f\|_1,$$

czyli to odwzorowanie zachowuje normę. $\square$

Całka dowolnej funkcji po zbiorze o mierze zero zawsze wynosi zero. Zatem warunkiem koniecznym istnienia pochodnej Radona-Nikodyma miary $\nu$ względem miary $\nu$ jest absolutna ciągłość:

**Definicja 2.3.** Powiemy, że miara $\nu$ jest *absolutnie ciągła* względem miary $\mu$, co zapisujemy $\nu \ll \mu$, jeżeli dla każdego $A \in \Sigma$

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0,$$

tzn. miara $\nu$ ma niemniej zbiorów miary zero, niż miara $\mu$.

**Wniosek 2.4.** *Jeżeli pochodną Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu}$ istnieje, to $\nu \ll \mu$.*

**Przykład 2.5.** Niech $\mu$ będzie miarę Lebesgue'a, a $\nu$ miarą liczącą na przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Jasne jest, że $\nu \not\ll \mu$, bo jedyny zbiór $\nu$-miary zero, to zbiór pusty; natomiast $\mu$ ma wiele zbiorów miary zero (np. każdy zbiór przeliczalny albo zbiór Cantora). Zatem nie istnieje pochodna Radona-Nikodyma $\nu$ względem $\mu$.

Przez Twierdzenie Radona-Nikodyma zazwyczaj rozumie się każde twierdzenie, które pokazuje, że absolutna ciągłość jest nie tylko warunkiem koniecznym, ale też dostatecznym na istnienie pochodnej Radona-Nikodyma. Podstawowa wersja takiego twierdzenia, znana każdemu absolwentowi studiów matematycznych, sformułowana jest dla miar skończonych:

**Twierdzenie 2.6** (Radona-Nikodyma dla miary skończonej)**.** *Niech $\mu$, $\nu$ będą miarami skończonymi na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$. Jeżeli $\nu \ll \mu$ to istnieje mierzalna funkcja $f_0 : \Omega \to [0, +\infty)$ taka, że*

$$\nu(A) = \int\limits_A f_0 \, d\mu, \qquad \text{dla } A \in \Sigma.$$

*Ponadto, funkcja $f_0$ jest $\mu$-całkowalna i jest wyznacznona jednoznacznie $\mu$-prawie wszędzie.*

Twierdzenie 2.6 mówi tyle, że w przypadku absolutnie ciągłych miar skończonych pochodna Radona-Nikodyma zawsze istnieje, przyjmuje wartości skończone, jest całkowalna, i jest wyznaczona jednoznacznie jako element $L_1(\mu)$, czyli $\mu$-prawie wszędzie. Zanim przejdziemy do dowodu Twierdzenia 2.6 zauważmy, że na ogół dla „patologicznych" miar nieskończonych absolutna ciągłość nie jest równoważna istnieniu pochodnej Radona-Nikodyma. Pochodna Radona-Nikodyma może nie istnieć, a nawet gdy istnieje, to może nie być wyznaczona jednoznacznie.

**Przykład 2.7** (Przykład Saksa)**.** Zamieńmy rolami miary z Przykładu 2.5. To znaczy niech $\mu$ będzie miarą liczącą, a $\nu$ miarą Lebesgue'a na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Miara licząca jest absolutnie ciągła względem każdej miary. Zatem $\nu \ll \mu$. Jednak pochodna Radona-Nikodyma $\nu$ względem $\mu$ nie istnieje. Rzeczywiście, jeżeli założymy istnienie pochodnej Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu}$ to dla dowolnego $\{x\}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, otrzymamy $0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} \frac{d\nu}{d\mu}\,\mathrm{d}\mu$. Zatem $\frac{d\nu}{d\mu} = 0$, ponieważ $\mu(\{x\}) = 1$. Ale w konsekwencji otrzymujemy, że dla dowolnego $A \in \Sigma$ zachodzi $\nu(A) = \int_A 0 \mathrm{d}\mu = 0$, co jest sprzecznością, ponieważ $\nu$ jest miarą Lebesgue'a.

**Przykład 2.8.** Niech $\mu$ będzie trywialną miarą nieskończoną na dowolnej przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$; trywialną w tym sensie, że $\mu(A) = \infty$ dla każdego niepustego $A \in \Sigma$. Wtedy dowolna niezerowa funkcja jest pochodną Radona-Nikodyma $\mu$ względem $\nu := \mu$. Rzeczywiście, całka z dowolnej mierzalnej, niezerowej funkcji po zbiorze o mierze nieskończonej jest równa $\infty$. Zatem otrzymujemy $\infty = \infty$, czyli równość zachodzi w trywialny sposób.

## 2.2 Trzy dowody dla miar skończonych

W tym podrozdziale przedstawimy trzy różne dowody Twierdzenia 2.6. W szczególności zakładamy tu, że $\nu$ i $\mu$ są miarami skończonymi na $(\Omega, \Sigma)$ oraz $\nu \ll \mu$. Najpierw pokażemy jednoznaczność pochodnej Radona-Nikodyma.

Niech $f_0, \tilde{f}_0$ będą funkcjami spełniającymi warunek (2.1). Zauważmy, że $\{\omega \in \Omega : f_0(\omega) \neq \tilde{f}_0(\omega)\} = H_+ \sqcup H_-$, gdzie

$$H_+ = \{\omega \in \Omega : f_0(\omega) > \tilde{f}_0(\omega)\} \text{ oraz } H_- = \{\omega \in \Omega : f_0(\omega) < \tilde{f}_0(\omega)\}.$$

Stosując (2.1) mamy

$$\int_{H_\pm} f_0 d\mu = \nu(H_\pm) = \int_{H_\pm} \tilde{f}_0 d\mu.$$

Stąd $\int_{H_\pm} (\tilde{f}_0 - f_0) d\mu = 0$. Ale $\tilde{f}_0 - f_0 > 0$ na $H_+$ i całka za funkcji nieujemnej wynosi zero wtedy i tylko wtedy, gdy ta funkcja jest równa zero $\mu$-prawie wszędzie. Stąd $\mu(H_+) = 0$. Analogicznie $\mu(H_-) = 0$. Zatem $f_0$ i $\tilde{f}_0$ różnią się tylko na zbiorze o $\mu$-mierze zero.

Wspomaniane wyżej trzy różne dowody będą dotyczyły istnienia pochodnej Radona-Nikodyma.

### 2.2.1 Dowód klasyczny

Dowód ten wykorzystuje pojęcie miary znakowej (tzn. miary która może przyjmować wartości ujemne) i Twierdzenie Hahna. To twierdzenie mówi, że dla każdej miary znakowej istnieje podział przestrzeni na dwa rozłączne zbiory taki, że na jednym z tych zbiorów miara przyjmuje wartości nieujemne, a na drugim niedodatnie. Dla naszych potrzeb wystarczy rozpatrzeć skończone miary znakowe:

**Definicja 2.9.** Niech $(\Omega, \Sigma)$ będzie przestrzenią mierzalną. *Miarą znakową* na $(\Omega, \Sigma)$ nazwiemy funkcję $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, która jest $\sigma$-addytywna, tzn.

$$\mu\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

dla parami rozłącznych $E_n \in \Sigma$.

**Twierdzenie 2.10** (Hahna o rozkładzie)**.** *Jeżeli $\mu$ jest miarą znakową na $\Sigma$ $\sigma$-algebrze podzbiorów przestrzeni $\Omega$, to istnieje rozkład $\Omega = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ taki, że dla każdego $E \in \Sigma$ zachodzi*

$$\mu(A \cap E) \geqslant 0 \ \ i \ \ \mu(B \cap E) \leqslant 0.$$

Dowód. Dowód twierdzenia można znaleźć w [16, 6.14]. □

Dowód istnienia pochodnej Radona-Nikodyma zacznjijmy od oznaczenia przez $F$ zbiór wszystkich funkcji mierzalnych $f : \Omega \to [0, +\infty)$ takich, że dla dowolnego $E \in \Sigma$ zachodzi

$$\int_E f \mathrm{d}\mu \leqslant \nu(E).$$

Zauważmy, że $F$ jest niepusty, ponieważ $f = 0$ należy do $F$. Weźmy w takim razie $f_1, f_2 \in F$ i połóżmy

$$E_1 := \{\omega \in \Omega : f_1(\omega) > f_2(\omega)\} \text{ i } E_2 := \{\omega \in \Omega : f_1(\omega) \leqslant f_2(\omega)\}.$$

Zatem dla dowolnego $E \in \Sigma$ zachodzi

$$\int_E \max\{f_1, f_2\} \mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f_1 \mathrm{d}\mu + \int_{E_2} f_2 \mathrm{d}\mu \leqslant \nu(E_1) + \nu(E_2) = \nu(E),$$

czyli $\max\{f_1, f_2\} \in F$.

Weźmy ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ taki, że $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \sup_{f \in F} \int_\Omega f \mathrm{d}\mu$. Wtedy

$$g_n := \max\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

jest nieujemnym ciągiem niemalejącym zbiegającym do $\sup_{f\in F} \int_\Omega f \mathrm{d}\mu$. Oznaczmy $g(\omega) := \lim\limits_{n\to\infty} g_n(\omega)$. Z Twierdzenia Leviego o zbieżności monotonicznej otrzymujemy, że dla dowolnego $E \in \Sigma$ zachodzi

$$\int_E g \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \mathrm{d}\mu \leqslant \nu(E),$$

ponieważ $g_n \in F$. Zatem $g \in F$ i $\sup_{f \in F} \int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \mathrm{d}\mu$, czyli $g$ jest elementem maksymalnym zbioru $F$.

Skoro $g \in F$ to

$$\nu_0(E) := \nu(E) - \int_E g \mathrm{d}\mu, \tag{2.2}$$

definiuje miarę na $\Sigma$. Pokazując, że $\nu_0 = 0$ otrzymamy tezę. Załóżmy nie wprost, że $\nu_0 \neq 0$. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $\nu_0(\Omega) > \varepsilon\mu(\Omega)$. W takim razie $\nu_0 - \varepsilon\mu$ jest miarą znakową. Korzystając z Twierdzenia Hahna mamy rozkład $\Omega = A \cup B$ i z (2.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\nu(E) &= \nu_0(E) + \int_E g \mathrm{d}\mu \geqslant \nu_0(E \cap A) + \int_E g \mathrm{d}\mu \geqslant \\
&\geqslant \varepsilon\mu(E \cap A) + \int_E g \mathrm{d}\mu = \int_E \varepsilon \mathbb{1}_A + \int_E g \mathrm{d}\mu = \\
&= \int_E (g + \mathbb{1}_A) \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

co możemy zapisać jako

$$\int_E (g + \mathbb{1}) \mathrm{d}\mu \leqslant \nu(E). \tag{2.3}$$

Zauważmy, że $\mu(A) > 0$, bo jeżeli $\mu(A) = 0$ to z absolutnej ciągłości $\nu(A) = 0$. Z definicji $\nu_0$ mamy $\nu_0(A) \leqslant \nu(A)$, więc $\nu_0(A) = 0$. Wtedy

$$(\nu_0 - \varepsilon\mu)(\Omega) = (\nu_0 - \varepsilon\mu)(A) + (\nu_0 - \varepsilon\mu)(B) = (\nu_0 - \varepsilon\mu)(B) \leqslant 0,$$

czyli $\nu_0(\Omega) \leqslant \varepsilon\mu(\Omega)$ co daje nam sprzeczność z $\nu_0(\Omega) > \varepsilon\mu(\Omega)$. Zatem ostatecznie mamy $\mu(A) > 0$. Wiedząc to i korzystając z (2.3) otrzymujemy, że

$$\int\limits_\Omega (g + \mathbb{1}_A) \leqslant \nu(\Omega) < \infty,$$

czyli $(g + \mathbb{1}_A) \in F$ i zachodzi

$$\sup_{f \in F} \int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \mathrm{d}\mu < \int_\Omega (g + \mathbb{1}_A) \mathrm{d}\mu,$$

co jest sprzeczne z faktem, że $g$ jest elementem maksymalnym $F$. Zatem założenie $\nu_0 \neq 0$ jest fałszywe i $\nu_0 = 0$, czyli dla dowolnego $E \in \Sigma$ zachodzi

$$\nu(E) = \int_E g \mathrm{d}\mu.$$

Skoro $g$ jest $\mu$-całkowalna, to $\mu$-miara zbioru $\{\omega \in \Omega : g(\omega) = \infty\}$ jest równa zero i możemy zdefiniować funkcję $f : \Omega \to \mathbb{R}$ następująco

$$f(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & \text{dla } g(\omega) < \infty \\ 0 & \text{dla } g(\omega) = \infty. \end{cases}$$

### 2.2.2 Dowód Johna Von Neumanna

Drugi dowód pochodzi od Johna Von Neumanna. Idea tego dowodu opiera się Twierdzeniu Riesz-Frécheta (zwanym też Twierdzeniem Riesza o reprezentacji funkcjonału), które mówi, że dowolny ograniczony funkcjonał liniowy na przestrzeni Hilberta da się przedstawić w postaci iloczynu skalarnego z pewnym elementem tej przestrzeni:

**Twierdzenie 2.11** (Riesz-Fréchet)**.** *Niech $H$ będzię przestrzenią Hilberta oraz $T : H \to \mathbb{F}$. Odzwzorowanie $T$ jest ograniczonym funkcjonałem liniowym wtedy i tylko wtedy gdy istnieje dokładnie jeden $y \in H$ taki, że*

$$T(x) = \langle x, y\rangle$$

*dla każdego $x \in H$. Ponadto, wtedy $\|T\| = \|y\|$.*

Dowód. Dowód tego twierdzenia mozna znaleźć w [3, 3.4]. □

Zastosujemy to twierdzenie do pewnego funkcjonału na przestrzeni Hilberta $H = L_2(\varphi)$ związanej z miarą $\varphi : \mu + \nu$. Mianowicie, rozważmy funkcjonał dany wzorem

$$T(f) := \int_\Omega f \mathrm{d}\nu \quad \text{dla } f \in L_2(\varphi).$$

Korzystając z nierówności Schwartza, patrz też Twierdzenie 1.3, dla każdego $f \in L_2(\varphi)$ mamy

$$\left|\int_\Omega f \mathrm{d}\nu\right| \leqslant \int_\Omega |f|\, \mathrm{d}\nu = \int_\Omega |f| \cdot \mathbb{1}_\Omega \mathrm{d}\nu \leqslant \left(\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}\nu\right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega \mathbb{1}_\Omega^2 \mathrm{d}\nu\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (\nu(\Omega))^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}\varphi\right)^{1/2}.$$

Zatem $T$ jest ograniczonym funkcjonałem liniowym (i $f$ jest $\nu$-całkowalna). Teraz z Twierdzenia 2.11 wynika, że istnieje $g \in L_2(\varphi)$ takie, że

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f g \mathrm{d}\varphi. \tag{2.4}$$

To równanie możemy zapisać inaczej

$$\int_\Omega f(1-g) \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f g \mathrm{d}\mu. \tag{2.5}$$

Zbadamy teraz jak zachowuje się funkcja $g$. Połóżmy

$$N := \{\omega \in \Omega : g(\omega) < 0\},$$
$$B := \{\omega \in \Omega : g(\omega) > 1\}.$$

Dla $f = \mathbb{1}_N$ z (2.4) mamy $\int_\Omega \mathbb{1}_N \mathrm{d}\nu = \int_\Omega \mathbb{1}_N g \mathrm{d}\varphi$, czyli

$$\int_N \mathrm{d}\nu = \int_N g \mathrm{d}\varphi.$$

Lewa strona równania jest nieujemna, ponieważ $\nu$ jest miarą, a prawa strona jest niedodatnia, ponieważ $g$ przyjmuje wartości ujemne na $N$. Ta sytuacja może mieć miejsce tylko wtedy, gdy obie strony są równę zero, czyli $\nu(N) = 0$ i $\mu(N) = 0$. Dla $f = \mathbb{1}_B$ z (2.5) mamy $\int_\Omega \mathbb{1}_B(1-g)\mathrm{d}\nu = \int_\Omega \mathbb{1}_B g\mathrm{d}\mu$, czyli

$$\int_B (1-g)\mathrm{d}\nu = \int_B g\mathrm{d}\mu.$$

Na zbiorze $B$ funkcja $g$ przyjmuje wartości większe niż 1, więc lewa strona równania jest niedodatnia, a prawa jest nieujemna. Ta sytuacja może mieć miejsce tylko wtedy, gdy obie strony są równe zero. Z prawej strony mamy całkę po zbiorze $B$ z funkcji $g$ (przyjmującej wartości większe od 1 na $B$), która jest równa zero, więc $\mu(B) = 0$. Z absolutnej ciągłości $\nu$ względem $\mu$ mamy $\nu(B) = 0$. Z powyższych rozważań wynika, że zbiory $N$ i $B$ są miary zero względem miary $\varphi$. Zatem możemy założyć, że funkcja $g$ przyjmuje na nich wartości 0 i 1 odpowiednio.

Teraz rozpatrzmy zbiory

$$\begin{aligned} G :=& \{\omega \in \Omega : 0 \leqslant g(\omega) < 1\},\\ S :=& \{\omega \in \Omega : g(\omega) = 1\}, \end{aligned}$$

które tworzą rozbicie $\Omega$. Niech $f = \mathbb{1}_S$ i podstawiając to do (2.5) otrzymujemy

$$\int_\Omega \mathbb{1}_S(1-g)\mathrm{d}\nu = \int_\Omega \mathbb{1}_S g\mathrm{d}\mu \iff \int_S (1-1)\mathrm{d}\nu = \int_S \mathrm{d}\mu \iff 0 = \mu(S),$$

co w połączeniu z absolutną ciągłością tych miar daje nam, że $\nu(S) = 0$. W konsekwencji oznacza to, że zbiór $G$ jest zbiorem pełnej miary, tzn. $\mu(G) = \mu(\Omega)$. Oznaczając

$$G_n := \{\omega \in \Omega : 0 \leqslant \omega < 1 - \frac{1}{n}\}$$

możemy napisać, że $G = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$. Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ i $E \in \Sigma$ niech

$$f_n := \frac{\mathbb{1}_{G_n \cap E}}{1-g}.$$

Jest to funkcja nieujemna i ograniczona z góry przez $n$ (mianownik jest większy od $\frac{1}{n}$). Ciag $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ jest niemalejącym ciągiem funkcji mierzalnych i

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{1}_{G_n\cap E}(\omega)}{1-g(\omega)} = \frac{\mathbb{1}_{G\cap E}(\omega)}{1-g(\omega)} =: f(\omega).$$

Na mocy Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej $f$ jest mierzalna, całka z $f_n$ zbiega do całki z $f$ i na mocy (2.5) mamy

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\mathbb{1}_{G\cap E}}{1-g}(1-g)\mathrm{d}\nu = \int_\Omega \frac{\mathbb{1}_{G\cap E}}{1-g} g\mathrm{d}\mu &\iff \\ \nu(G\cap E) = \int_{G\cap E} \frac{g}{1-g}\mathrm{d}\mu &\iff \\ \nu(G) = \int_E \frac{g}{1-g}\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy, że funkcja $\frac{g}{1-g}$ jest tą szukaną funkcją spełniającą tezę.

### 2.2.3 Dowód Samuelsa

Trzeci dowód autorstwa S. M. Samuelsa pochodzi z artykułu [17] opublikowanego w 1978 roku. Artykuł ten miał pokazać, że Twierdzenie Radona-Nikodyma jest fundamentem współczesnej teorii prawdopodobieństwa. W tym celu autor wykorzystuje przeliczalną warunkową wartość oczekiwaną, która pozwala udowodnić Twierdzenie Radona-Nikodyma. Jest to bardzo zaskakujący wynik, ponieważ zazwyczaj pokazuje się, że z tego Twierdzenia wynika istnienie warunkowej wartości oczekiwanej, a tu mamy sytuację odwrotną.

Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie całkowalną zmienną losową (tzn. całkowalną funkcją mierzalną) na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (tzn. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest przestrzenią z miarą i $P(\Omega) = 1$). Niech $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie dyskretną zmienną losową, czyli $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots\}$ jest zbiorem przeliczalnym. Załóżmy, że dla

$$A_i := Y^{-1}(y_i) \in \mathcal{F} \quad i = 1, 2, \dots$$

mamy $P(A_i) > 0$ i $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$.

Możemy zdefiniować również *prawdopodobieństwo warunkowe* w następujący sposób: prawdopodobieństwem zdarzenia $A$ pod warunkiem $B$ nazwiemy liczbę

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

gdzie $A, B \in \Omega$ oraz $P(B) > 0$.

**Definicja 2.12.** *Warunkową wartością oczekiwaną (WWO) zmiennej losowej $X$ pod warunkiem $Y = y_i$* nazywamy liczbę

$$E(X|Y = y_i) = \int_{\Omega} X \mathrm{d}P(\cdot|Y = y_i) = \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X \mathrm{d}P.$$

*WWO zmiennej $X$ pod warunkiem $Y$* nazywamy zmienną losową

$$E(X|Y(\omega)) := E(X|Y = y_i) \quad \text{gdy} \quad Y(\omega) = y_i$$

tzn. $E(X|Y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X \mathrm{d}P \cdot \mathbb{1}_{A_i}$.

**Uwaga 2.13.** Warunkowa wartość oczekiwana $E(X|Y)$ zależy tylko od $X$ i od rozbicia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, które możemy odtworzyć z $\sigma$-algebry $\sigma(\{A_i\}_{i=1}^{\infty}) = \sigma(Y) =: \mathcal{G}$ generowanej przez to rozbicie. Zatem możemy pisać

$$E(X|Y) =: E(X|\mathcal{G}).$$

Ponadto, warunkowa wartość $E(X|\mathcal{G})$ jest wyznaczona $P$-prawie wszędzie przez warunki:

1) $E(X|\mathcal{G})$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna,

2) dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ zachodzi $\int_A E(X|\mathcal{G})\mathrm{d}P = \int_A X\, d\mu$, ponieważ

$$\int_A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X\mathrm{d}P \cdot \mathbb{1}_{A_i}\mathrm{d}P = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X\mathrm{d}P \cdot \mathbb{1}_{A_i \cap A}$$
$$= \sum_{i: A_i \subseteq A} \int_{A_i} X\mathrm{d}P = \int_A X\mathrm{d}P.$$

Dla dowolnej $\sigma$-podalgebry $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, niekoniecznie generowanej przez przeliczalne rozbicie, powyższe warunki służą za definicję WWO, patrz Definicja 4.1 poniżej. Co więcej korzystając z Twierdzenia 2.6 moglibyśmy teraz pokazać, że tak zdefiniowana WWO zawsze istnieje zawsze, patrz Twierdzenie 4.3 poniżej. My jednak w tym podrozdziale pokażemy na odwrót, że przeliczalna WWO pozwala udowodnić Twierdzenie 2.6.

Chcemy pokazać, że jeżeli mamy dwie miary skończone $\nu, \mu$ na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$ i $\nu \ll \mu$ to istnieje nieujemna, mierzalna funkcja $f_0$ taka, że dla dowolonego $A \in \Sigma$ zachodzi $\nu(A) = \int_A f_0 \mathrm{d}\mu$. Zauważmy, że skoro $\nu \ll \mu$ to dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ funkcja $\nu - t\mu$ jest miarą znakową. Zastosujmy do niej Twierdzenie 2.10, czyli otrzymujemy zbiór $A_t \in \Sigma$ taki, że dla $G \in \Sigma$

$$\begin{aligned} G \subseteq A_t &\implies \mu(G) \geqslant t\nu(G) \\ G \subseteq A_t' &\implies \mu(G) \leqslant t\nu(G). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Będziemy rozpatrywać tylko $t = \frac{k}{2^n}$, dla $k, n = 0, 1, 2, \ldots$, żeby mieć przeliczalny zbiór wskaźników. Załóżmy, że $A_0 := \Omega$. Dla $r > s$ korzystając z (2.6) mamy

$$\frac{\nu(A_r \setminus A_s)}{s} \leqslant \mu(A_r \setminus A_s) \leqslant \frac{\nu(A_r \setminus A_s)}{r}$$

i otrzymujemy $\mu(A_r \setminus A_s) = \nu(A_r \setminus A_s) = 0$. W rezultacie możemy założyć, że rodzina $\{A_t\}_t$ jest nierosnąca, tzn. $r > s \implies A_r \subseteq A_s$. Dodatkowo biorąc $G := \cap_t A_t$ mamy $\mu(G) \geqslant t\nu(G)$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, ale $\nu$ jest miarą skończoną, więc $\mu(\cap_t A_t) = 0$.

Teraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$\mathcal{G}_n := \{G_{nk} := A_{\frac{k}{2^n}} \setminus A_{\frac{k+1}{2^n}} : k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Zauważmy, że jest to przeliczalne rozbicie $\Omega$ i rożważmy następujące przeliczalne WWO

$$E(\nu|\mathcal{G}_n) := \sum_k \frac{\nu(G_{nk})}{\mu(G_{nk})} \cdot \mathbb{1}_{G_{nk}}.$$

Porównując to z Definicją 2.12 możemy zauważyć, że $\mu$ odpowiada $P$, a $\nu(A)$ odpowiada $\int_A X\mathrm{d}P$. Korzystając z (2.6) otrzymujemy, że

- $A \subseteq A_{\frac{k}{2^n}} \implies \nu(A) \geqslant \frac{k}{2^n}\mu(A)$,
- $A \subseteq A'_{\frac{k+1}{2^n}} \implies \nu(A) \leqslant \frac{k+1}{2^n}\mu(A)$,
- $A \subseteq G_{nk} = A_{\frac{k}{2^n}} \setminus A_{\frac{k+1}{2^n}} \implies \frac{k}{2^n}\mu(A) \leqslant \nu(A) \leqslant \frac{k+1}{2^n}\mu(A)$,

czyli dla każdego $A \in \Sigma$ mamy

$$\frac{k}{2^n}\mu(A) \leqslant \frac{\nu(G_{nk} \cap A)}{\mu(G_{nk} \cap A)} \leqslant \frac{k+1}{2^n}\mu(A). \tag{2.7}$$

Zatem na $G_{nk}$ zachodzi

$$\frac{k}{2^n} \leqslant E(\nu|\mathcal{G}_n) \leqslant \frac{k+1}{2^n}.$$

Jako, że podziały $\{G\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ są coraz drobniejsze, to $E(\nu|\mathcal{G}_n)$ zbiega do funkcji mierzalnej $E(\nu|\mu) =: f_0$. Teraz musimy tylko pokażać, że

1) dla dowolnego $A \in \Sigma$ $\quad \int_A E(\nu|\mathcal{G}_n)\mathrm{d}\mu \to \int_A f_0\mathrm{d}\mu$,

2) dla dowolnego $A \in \Sigma$ $\quad \int_A E(\nu|\mathcal{G}_n)\mathrm{d}\mu \to \nu(A)$.

Weźmy

$$\begin{aligned}\left|\int_A E(\nu|\mathcal{G}_n)\mathrm{d}\mu - \int_A f_0\mathrm{d}\mu\right| &\leqslant \int_A |E(\nu|\mathcal{G}_n)|\,\mathrm{d}\mu \\ = \sum_k \int_{A\cap G_{nk}} |E(\nu|\mathcal{G}_n) - f_0|\mathrm{d}\mu &\leqslant \frac{1}{2^n}\mu(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

czyli otrzymaliśmy 1). Teraz pokażemy, że

$$\begin{aligned}\left|\int_A E(\nu|\mathcal{G}_n)\mathrm{d}\mu - \nu(A)\right| &= \left|\sum_k \int_{A\cap G_{nk}} E(\nu|\mathcal{G}_n)\mathrm{d}\mu - \nu(A\cap G_{nk})\right| = \\ &\left|\sum_k \frac{\nu(G_{nk})}{\mu(G_{nk})}\mu(G_{nk}) - \frac{\nu(A\cap G_{nk})}{\mu(A\cap G_{nk})}\mu(A\cap G_{nk})\right| \\ &\leqslant \sum_k \left|\frac{\nu(G_{nk})}{\mu(G_{nk})} - \frac{\nu(A\cap G_{nk})}{\mu(A\cap G_{nk})}\right| \cdot \mu(A\cap G_{nk}) \\ &\leqslant \sum_k \frac{1}{2^n}\mu(A\cap G_{nk}) = \frac{1}{2^n}\mu(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

czyli zachodzi 2). Ostatecznie otrzymaliśmy, że ciąg funkcji mierzalnych $E(\nu|\mathcal{G}_n)$ zbiega do dwóch wartości, czyli one muszą być sobie równe, tzn. dla dowolnego $A \in \Sigma$ zachodzi

$$\nu(A) = \int_A f_0\mathrm{d}\mu.$$

## 2.3 Twierdzenie Radona-Nikodym dla miar $\sigma$-skończonych

Wiemy już, że twierdzenie Radona-Nikodyma zachodzi dla miar skończonych. Teraz udowodnimy, że twierdzenie to zachodzi również w przypadku, gdy miara dominująca jest $\sigma$-skończona, a miara dominowana może być dowolna. Zaczniemy od prostszego i powszechnie znanego wariantu Twierdzenia Radona-Nikodyma dla przypadku, gdy obie miary są $\sigma$-skończone.

Jedyna różnica między tezą poniższego twierdzenia i tezą Twierdzenia 2.6 (dla miar skończonych) jest taka, że pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu} : \Omega \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ nie musi być funkcją całkowalną. Oczywistym jest, że funkcja ta będzie całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy miara $\nu$ jest skończona.

**Twierdzenie 2.14** (Radona-Nikodyma dla miar $\sigma$-skończonych)**.** *Niech* $(\Omega, \Sigma)$ *będzie przestrzenią mierzalną, i niech* $\mu, \nu$ *będą* $\sigma$*-skończonymi miarami. Jeżeli* $\nu \ll \mu$ *to istnieje* $\Sigma$*-mierzalna funkcja* $f_0 : \Omega \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ *taka, że*

$$\nu(A) = \int_A f_0 \,\mathrm{d}\mu, \qquad \text{dla } A \in \Sigma.$$

*Funkcja* $f_0$ *jest wyznaczona* $\mu$*-prawie wszędzie.*

Dowód. Z $\sigma$-skończoności miar wynika, że istnieją dwa mierzalne rozkłady przeliczalne $\Omega = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^1 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^2$, dla których $\mu(\Omega_n^1) < \infty, \nu(\Omega_n^2) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\{\Omega_n^1 \cap \Omega_m^2\}_{n,m \geqslant 1}$ jest przeliczalnym rozbiciem $\Omega$ na zbiory dla których obie miary $\mu$ i $\nu$ są skończone. Zatem istnieje rozbicie $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ przestrzeni $\Omega$ takie, że $\nu(\Omega_n), \mu(\Omega_n) < \infty$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rodzina $\{B \cap \Omega_n : B \in \Sigma\}$ jest $\sigma$-algebrą na $\Omega_n$, na której miary $\mu, \nu$ są skończone. Zatem z Twierdzenia Radona-Nikodyma dla miar skończonych (Twierdzenie 2.6) istnieją funkcje $f_n : \Omega_n \to \mathbb{R}^+$ wyznaczone $\mu$-prawie wszędzie, dla których

$$\nu(A) = \int_A f_n \mathrm{d}\mu, \quad A \in \Sigma, A \subseteq \Omega_n.$$

Teraz zdefiniujemy $f_0(\omega) := f_n(\omega)$, gdy $\omega \in \Omega_n, n \geqslant 1$. Funkcja ta jest dobrze określona i $\Sigma$-mierzalna. Można ją opisać wzorem $f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \mathbb{1}_{\Omega_n}$. Korzystając z Twierdzenia 1.1 i z definicji funkcji $f_0$ dla dowolnego $A \in \Sigma$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A \cap \Omega_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap \Omega_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap \Omega_n} f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n \mathbb{1}_{\Omega_n} \mathrm{d}\mu \\
&= \int_A \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbb{1}_{\Omega_n} \right) \mathrm{d}\mu = \int_A f_0 \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Jeżeli $f_0'$ jest inną funkcją mierzalną spełniają tezę twierdzenia, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$, funkcje $f_0'$ i $f_0$ są sobie równe $\mu$-prawie wszędzie na $\Omega_n$. Jako że zbiorów $\Omega_n$ jest przeliczalna ilość to $f_0'$ i $f_0$ są sobie równe $\mu$-prawie wszędzie na całej przestrzeni $\Omega$:

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f_0'(\omega) \neq f_0(\omega)\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{\omega \in \Omega_n : f_0'(\omega) \neq f_0(\omega)\}) = 0.$$

□

Teraz przejdziemy do ogólniejszego Twierdzenia Radona-Nikodyma, w którym miara $\nu$ może być dowolna. Ta wersja nie jest już tak dobrze znana. W książce Halmosa jest wymieniona jako ćwiczenie, patrz [7, VI.31(7)]. Poniższy dowód oparty jest o rozumowanie przedstawione w książce Rao [13, 5.4.1] (gdzie jest rozpatrywany przypadek, gdy $\mu$ jest miarą skończoną). Nowym elementem w przypadku, gdy $\nu$ jest dowolną miarą, jest to że musimy dopuścić pochodną Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu} : \Omega \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty]$ przyjmującą wartość $\infty$.

**Twierdzenie 2.15** (Radona-Nikodyma dla dowolnej miary absolutnie ciągłej względem miary $\sigma$-skończonej)**.** *Niech $\mu, \nu$ będą miarami na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$, gdzie $\nu$ jest dowolna, a $\mu$ $\sigma$-skończona. Jeżeli $\nu \ll \mu$ to istnieje $\Sigma$-mierzalna funkcja $f_0 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ taka, że*

$$\nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu, \qquad \text{dla } A \in \Sigma.$$

*Funkcja $f_0$ jest wyznaczona jednoznacznie $\mu$-prawie wszędzie. Ponadto funkcja $f_0$ jest $\mu$-prawie wszędzie skończona na zbiorach, na których miara $\nu$ jest $\sigma$-skończona.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\mu$ jest skończona, tzn. $\mu(\Omega) < \infty$. Niech

$$\Sigma_\nu := \{A \in \Sigma : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ A_n \in \Sigma, \nu(A_n) < \infty\}$$

będzie rodziną zbiorów o $\nu$-mierze $\sigma$-skończonej. Jasne jest, że $\Sigma_\nu$ jest $\sigma$-pierścieniem. Zauważmy, że supremum $\alpha := \sup_{A \in \Sigma_\nu} \mu(A)$ jest skończone, bo $\alpha \leqslant \mu(\Omega) < \infty$, i realizuje się dla pewnego $A_0 \in \Sigma_\nu$. Rzeczywiście, dla dowolnego ciągu $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma_\nu$ takiego, że $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \alpha$ mamy $A_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_\nu$ oraz $\mu(A_0) = \alpha$. Twierdzimy, że na dopełnieniu $A_0'$ zbioru $A$ miara $\nu$ jest trywialna, tzn. przyjmuje tylko wartości 0 lub $\infty$.

Rzeczywiście, załóżmy nie wprost, że istnieje $B \in \Sigma$ taki, że $B \subseteq A_0'$ oraz $0 < \nu(B) < \infty$. Wtedy $B \in \Sigma_\nu$, z definicji $\Sigma_\nu$, a zatem $B \cup A_0 \in \Sigma_\nu$. Ponadto, skoro $\nu \ll \mu$, to $\mu(B) > 0$. Prowadzi do sprzeczności

$$\alpha < \mu(A_0) + \mu(B) = \mu(A_0 \sqcup B) \leqslant \alpha. \tag{2.8}$$

Zatem dla każdego $B \in \Sigma$ zawartego w $A_0'$ mamy $\nu(B) \in \{0, \infty\}$. Ponadto, jeśli $\nu(B) = 0$, to $\mu(B) = 0$. Rzeczywiście, gdyby $\nu(B) = 0$ i $\mu(B) > 0$, to $B \in \Sigma_\nu$, skąd $A_0 \cup B \in \Sigma_\nu$, co prowadzi do sprzeczności (2.8). Reasumując, miara $\nu$ na $A_0'$ jest trywialna i jest równoważna mierze $\mu$, tzn. dla $B \in \Sigma$ zawartego w $A_0'$ mamy

$$\nu(B) = 0 \iff \mu(B) = 0.$$

Miara $\nu$ obcięta do przestrzeni mierzalnej $(A_0, \Sigma(A_0))$, gdzie $\Sigma(A_0) := \{A \in \Sigma : A \subseteq A_0\}$, jest $\sigma$-skończona. Oczywiście miara $\mu$ obcięta do $\Sigma(A_0)$ pozostaje skończona. Zatem na mocy Twierdzenia 2.14 istnieje funkcja mierzalna $f_0 : A_0 \to \mathbb{R}^+$, wyznaczona jednoznacznie $\mu$-prawie wszędzie, taka że

$$\nu(A) = \int\limits_A f_0 \,\mathrm{d}\mu, \qquad \text{dla } A \in \Sigma(A_0).$$

Przedłużmy $f_0$ na $\Omega$ kładąc $f_0|_{A_0'} \equiv \infty$. Wtedy dla $B \in \Sigma$ zawartego w $A_0'$ mamy

$$\int_B f_0 \,\mathrm{d}\mu = \begin{cases} 0, & \mu(B) = 0 \\ \infty, & \mu(B) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \nu(B) = 0 \\ \infty, & \nu(B) = \infty \end{cases} = \nu(B).$$

Stąd dla dowolnego $B \in \Sigma$ mamy

$$\int_B f_0 \, d\mu = \int_{B \cap A_0} f_0 \, d\mu + \int_{B \cap A_0'} f_0 \, d\mu = \nu(B \cap A_0) + \nu(B \cap A_0') = \nu(B).$$

Zatem pozostaje jedynie pokazać, że $f_0$ jest wyznaczone jednoznacznie $\mu$-prawie wszędzie na zbiorze $A_0'$, tzn. że jeżeli $f_0' : A_0' \to [0, +\infty]$ jest funkcją mierzalną taką, że $\nu(B) = \int_B f_0' \, d\mu$ dla każdego $B \in \Sigma$, $B \subseteq A_0'$, to $f_0' = +\infty$ $\mu$-prawie wszędzie. Załóżmy nie wprost, że istnieje mierzalny zbiór $B \subseteq A_0'$ taki, że $\mu(B) > 0$ oraz $f_0' < \infty$ na $B$. Połóżmy, $B_n := \{\omega \in B : f_0'(\omega) \leqslant n\}$. Wtedy $\{B_n\}_{n=1}^\infty \subseteq A_0'$ oraz $B_n \nearrow B$, skąd $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B) > 0$. Zatem dla dostecznie dużych $n$ mamy $\mu(B_n) > 0$, co implikuje, że $\nu(B_n) = \infty$. To prowadzi do następującej sprzeczności

$$\infty = \nu(B_n) = \int_B f_0' \, d\mu \leqslant n\mu(B_n) < \infty.$$

To kończy dowód w przypadku, gdy miara $\mu$ jest skończona.

Jeśli $\mu$ jest $\sigma$-skończona i $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Sigma$ jest rozbiciem przestrzeni $\Omega$ na zbiory o $\mu$-mierze skończonej, to możemy zastosować udowodnioną już tezę twierdzenia do miar skończonych $\nu$ i $\mu$ obciętych do zbioru $\Omega_n$ (porównaj dowód Twierdzenia 2.14). W ten sposób otrzymujemy funkcje $f_n : \Omega_n \to \overline{\mathbb{R}}^+$ wyznaczone $\mu$-prawie wszędzie, dla których

$$\nu(A) = \int\limits_A f_n \mathrm{d}\mu, \quad A \in \Sigma, A \subseteq \Omega_n,$$

oraz $f_n$ jest $\mu$-prawie wszędzie skończona na zbiorach, na których miara $\nu$ jest $\sigma$-skończona. Kładąc $f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \mathbb{1}_{\Omega_n}$ otrzymujemy poprawnie określoną funkcję $\Sigma$-mierzalną, która jest $\mu$-prawie wszędzie skończona na zbiorach, na których miara $\nu$ jest $\sigma$-skończona. Ponadto dla dowolnego $A \in \Sigma$ mamy

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap \Omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A \cap \Omega_n} f_n \mathrm{d}\mu = \int\limits_{A} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbb{1}_{\Omega_n} \right) \mathrm{d}\mu = \int\limits_{A} f_0 \mathrm{d}\mu.$$

W szczególności, z powyższych rozważań wynika, że funkcja $f_0$ jest wyznaczona $\mu$-jednoznacznie (porównaj dowód Twierdzenia 2.14). $\square$

# Rozdział 3

# Ogólne Twierdzenie Radona-Nikodyma i miary lokalizowalne

## 3.1 Quasi-pochodna Radona-Nikodyma

**Definicja 3.1.** *Quasi-funkcją* na przestrzeni z miarą $(\Omega, \Sigma, \mu)$ nazywamy rodzinę funkcji $\{f_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$ indeksowaną przez $\sigma$-pierścień zbiorow o mierze $\sigma$-skończonej $\Sigma_\mu := \{A \in \Sigma : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \mu(A_n) < \infty\}$ taką, że dla każdych $A, B \in \Sigma_\mu$

(1) $f_A$ jest funkcją mierzalną znikającą $\mu$-prawie wszędzie poza zbiorem $A$,

(2) funkcje $f_A$ i $f_B$ równają się sobie $\mu$-prawie wszędzie na $A \cap B$.

Powiemy, że quasi-funkcja $\{f_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$ jest nieujemna, jeżeli $f_A \geqslant 0$ $\mu$-prawie wszędzie, dla dowolnego $A \in \Sigma_\mu$

**Uwaga 3.2.** Quasi-funkcje możnaby zdefiniować jako rodziny $\{f_A\}_{A\in\mathcal{F}_\mu}$ indeksowane względem $\sigma$-pierścieniem zbiorów o mierze skończonej $\mathcal{F}_\mu := \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\}$. Jednakże każdą taką rodzinę spełaniającą warunki (1) i (2) w powyższej definicji można rozszerzyć do quasi-funkcji $\{f_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$. Mianowicie, dla każdego zbioru $A \in \Sigma_\mu$ o mierze nieskończonej, można ustalić ciąg $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}_\mu$ taki, że $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i położyć $f_A(\omega) = f_{A_n}(\omega)$, jeśli $\omega \in A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k$ oraz $f_A = 0$ poza $A$.

**Twierdzenie 3.3** (Ogólne Twierdzenie Radona-Nikodyma)**.** *Dla dowolnych miar $\nu, \mu$ na tej samej przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$, jeśli $\nu \ll \mu$, to istnieje quasi-funkcja $\{f_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$ taka, że*

$$\nu(A) = \int_A f_A \, d\mu, \qquad A \in \Sigma_\mu. \tag{3.1}$$

*Quasi-funkcja* $\{f_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$ *jest nieujemna i wyznaczona jednoznacznie* $\mu$*-prawie wszędzie, tzn. dla innej takiej quasi-funkcji,* $\{g_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$ *mamy* $g_A = f_A$ $\mu$*-prawie wszędzie, dla każdego* $A \in \Sigma_\mu$*.*

Dowód. Dla każdego $A \in \Sigma_\mu$ możemy zastosować Twierdzenie 2.15 do miar $\nu$ i $\mu$ obciętych do $\sigma$-algebry $\Sigma(A) := \{A \cap B : B \in \Sigma\}$ na $A$. Wtedy istnieje nieujemna $\Sigma(A)$-mierzalna funkcja $f_A$ taka, że $\nu(C) = \int_C f_A\,d\mu$ dla każdego mierzalnego $C \subseteq A$. Ponadto funkcja $f_A$ z tymi własnościami jest wyznaczona jednozancznie $\mu$-prawie wszędzie na $A$. Kładąc $f_A = 0$ poza $A$ otrzymujemy nieujemną funkcję $\Sigma$-mierzalną na $\Omega$ spełniającą $\nu(A) = \int_A f_A\,d\mu$. Zatem tak skonstruowana rodzina $\{f_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$ spełnia warunek (1) definicji. Ponadto, jeśli $A, B \in \Sigma_\mu$, to dla wolnego mierzalnego $C \subseteq A \cap B$ mamy

$$\nu(C) = \int_C f_A\,d\mu = \int_C f_B\,d\mu = \int_C f_{A\cap B}\,d\mu.$$

Zatem ze wcześniej wspomnianej jednoznaczności funkcji $f_A$, otrzymujemy, że $f_A$ i $f_B$ równają się $\mu$-prawie wszędzie na $A \cap B$ funkcji $f_{A\cap B}$. Stąd $\{f_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$ jest żądaną quasi-funkcją. □

**Definicja 3.4.** Quasi-funkcję $\{f_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$ z Twierdzenia 3.3 będziemy oznaczać $\frac{d\nu}{d\mu}$ i nazywać *quasi-pochodną Radona-Nikodyma* miary $\nu$ względem $\mu$.

W świetle powższych rozważań naturalnym stają się dwa pytania. Po pierwsze kiedy quasi-funkcję $\{f_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$ da się *skleić do funkcji mierzalnej*. To znaczy,

> (1) Kiedy istnieje funkcja mierzalna $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ taka, że dla każdego $A \in \Sigma_\mu$ funkcje $f$ i $f_A$ równają się sobie $\mu$-prawie wszędzie na $A$?

Po drugie, jeśli taka funkcja $f$ już istnieje, to kiedy wzór (3.1) da się rozciągnąć na wszystkie zbiory z $\Sigma$ (niekoniecznie o $\mu$-mierze $\sigma$-skończonej). To znaczy

> (2) Kiedy funkcja $f$ opisana w (1) jest pochodną Radona-Nikodyma miary $\nu$ względem $\mu$?

W trywialny sposób taka funkcja $f$ istnieje i jest pochodną Radona-Nikodyma, jeśli $\mu$ jest miarą $\sigma$-skończona, bo wtedy $\Omega \in \Sigma_\mu$ i można wziąć $f = f_\Omega$. W ogólnym przypadku Segal [18] i Zaneen [20] odpowiedzieli na te pytania odpowiednio: lokalizowalność oraz semi-skończoność. Poniżej dogłębnie omówimy te pojęcia.

## 3.2 Miary semiskończone

**Definicja 3.5.** Niech $\mu$ i $\nu$ będą miarami na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$. Powiemy, że miara $\nu$ jest *$\mu$-semi-skończona* (lub *semi-skończona względem $\mu$*), jeżeli dla każdego $A \in \Sigma$ o niezerowej $\nu$-mierze istnieje mierzalny podzbiór $B \subseteq A$ o niezerowej $\nu$-mierze oraz $\mu$-mierze skończonej, tzn.

$$0 < \nu(A) \implies 0 < \nu(B) \text{ oraz } \mu(B) < \infty \text{ dla pewnego } B \subseteq A.$$

Powiemy, że miara $\mu$ jest *semi-skończona* jeżeli jest $\mu$-semi-skończona, tzn.

$$0 < \mu(A) \implies 0 < \mu(B) < \infty \text{ dla pewnego } B \subseteq A.$$

**Przykład 3.6.** Jeśli $\mu$ jest $\sigma$-skończona, to każda miara $\nu$ (określona na tej samej przestrzeni co $\mu$) jest $\mu$-semi-skończona. Rzeczywiście, jeżeli $0 < \nu(A)$, to zapisując $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, i korzystając z ciągłości miary mamy $\nu(A) = \lim_{N\to\infty} \nu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n)$. Zatem dla dostatecznie dużego $N$

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) > 0 \quad \text{oraz} \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) < \infty,$$

czyli warunek z definicji zachodzi dla $B = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. W szczególności każda miara $\sigma$-skończona jest semi-skończona.

**Przykład 3.7.** Miara licząca $\mu$ jest zawsze semi-skończona, ale nie jest $\sigma$-skończona jeśli jest określona na przestrzeni nieprzeliczalnej. Co więcej na ogół nie każda miara jest $\mu$-semi-skończona. Rzeczywiście, rozważmy miary z Przykładu 2.7 (Przykład Saksa). To znaczy niech $\mu$ i $\nu$ będą określona na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i niech $\nu$ będzie miarą Lebesgue'a. Wtedy warunek $\mu(B) < \infty$ dla miary liczącej oznacza, że zbiór $B$ jest skończony, co dla miary Lebesgue'a implikuje, że $\nu(B) = 0$. Zatem $\nu$ nie jest $\mu$-semi-skończona.

**Stwierdzenie 3.8.** *Niech $(\Omega, \Sigma)$ przestrzeń mierzalna, $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ rodzina zamknięta na podzbiory i skończone sumy, tzn. $B \subseteq A \in \mathcal{F} \implies B \in \mathcal{F}$ oraz $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$. Jeśli $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ jest $\sigma$-addytywną funkcją zbioru taką, że $\nu(\emptyset) = 0$, to wzór*

$$\overline{\nu}(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A,\ B \in \mathcal{F}\}$$

*definiuje miarę na $(\Omega, \Sigma)$ będącą przedłużeniem $\nu$. Miara ta jest semi-skończona jeśli funkcja $\nu$ przyjmuje wartości skończone.*

Dowód. Jasne jest, że $\overline{\nu}(\emptyset) = 0$. Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ będzie ciągiem zbiorów prami rozłącznych. Niech $B \subseteq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $B \in \mathcal{F}$. Kładąc $B_n := A_n \cap B \subseteq A_n$ otrzymujemy ciąg $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ parami rozłącznych zbiorów z $\mathcal{F}$ (bo $\mathcal{F}$ jest zamknięta na podzbiory i $B \in \mathcal{F}$). Zatem korzystając z $\sigma$-addytywności $\nu$ mamy $\nu(B) = \nu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\nu}(A_n)$. Stąd

$$\overline{\nu}(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\nu}(A_n).$$

Zauważmy, że dla sum skończonych w tej nierówności mamy równość. Rzeczywiście, jeśli $B_n \subseteq A_n$ oraz $B_n \in \mathcal{F}$, dla $n = 1, ..., N$, to $B := \bigsqcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathcal{F}$ (bo $\mathcal{F}$ jest zamknięta na skończone sumy). Skoro $\nu$ jest addytywna i $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} A_n$, to $\sum_{n=1}^{N} \nu(B_n) = \nu(\bigsqcup_{n=1}^{N} B_n) = \nu(B) \leqslant \overline{\nu}(\bigcup_{n=1}^{N} A_n)$. Stąd

$$\sum_{n=1}^{N} \overline{\nu}(A_n) \leqslant \overline{\nu}(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n).$$

W świetle poprzedniej nierówności (którą dowiedliśmy dla ciągów nieskończonych, ale która zachodzi tym bardziej dla ciągów skończonych) mamy więc $\sum_{n=1}^{N} \overline{\nu}(A_n) = \overline{\nu}(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n)$. Korzystając dodatkowo z monotoniczności $\overline{\nu}$ (która wynika wprost z definicji $\overline{\nu}$) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{N} \overline{\nu}(A_n) = \overline{\nu}(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n) \leqslant \overline{\nu}(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n).$$

Przechodząc z $N$ do granicy dostajemy $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\nu}(A_n) \leqslant \overline{\nu}(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Kończy to dowód $\sigma$-addytywności $\overline{\nu}$.

Jeśli $A \in \mathcal{F}$ to $\overline{\nu}(A) = \nu(A)$, gdzie nierówność $\overline{\nu}(A) \leqslant \nu(A)$ wynika z monotoniczności $\nu$, a nierówność przeciwna wynika wprost z definicji $\overline{\nu}$. Zatem $\overline{\nu}|_{\mathcal{F}} = \nu$. Jasne jest, że $\overline{\nu}$ jest semi-skończona, jeśli $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ przyjmuje wyłącznie wartości skończone □

**Wniosek 3.9.** *Niech $\mu$ i $\nu$ będą miarami na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$. Wtedy wzór*

$$\overline{\nu}(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A,\ \mu(B) < \infty\}$$

*definiuje miarę na $(\Omega, \Sigma)$, która jest $\mu$-semi-skończona. Ponadto, $\nu = \overline{\nu}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu$ jest $\mu$-semi-skończona. Ogólnie $\overline{\nu} \leqslant \nu$ a równość zawsze zachodzi na zbiorach o $\mu$-mierze $\sigma$-skończonej.*

Dowód. Ze Stwierdzenia 3.8 zastosowanego do pierścienia $\mathcal{F}_\mu := \{B \in \Sigma : \mu(B) < \infty\}$ zbiorów o $\mu$-mierze skończonej, otrzymujemy, że $\overline{\nu}$ jest miarą. Pozostała treść tezy łatwo wynika z definicji $\overline{\nu}$. □

## 3.3 Suprema mierzalne dowolnych rodzin zbiorów i funkcji

**Definicja 3.10.** Niech $(\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Powiemy, że rodzina $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ ma *mierzalne supremum*, jeżeli istnieje $A_0 \in \Sigma$ takie, że

(1) $\mu(A \setminus A_0) = 0$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$,

(2) dla każdego $B \in \Sigma$ spełniającego (1) tzn. takiego, że $\mu(A \setminus B) = 0$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$, zachodzi $\mu(A_0 \setminus B) = 0$.

Będziemy wtedy pisać $\sup \mathcal{A} := A_0$ lub $\mu\text{-}\sup \mathcal{A} = A_0$.

**Uwaga 3.11.** Jeżeli $B_0 \in \Sigma$ inny zbiór spełaniający warunki (1), (2) powyższej definicji, to

$$\mu(A_0 \cap B_0) = \mu(A_0 \setminus B_0) + \mu(B_0 \setminus A_0) = 0.$$

Czyli supremum mierzalne $A_0$, o ile istnieje, jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do zbiorów miary zero.

**Przykład 3.12.** Jeśli wszystkie podzbiory $\Omega$ są mierzalne, tzn. $\Sigma = 2^{\Omega}$, to każda rodzina $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ ma mierzalne supremum oraz

$$\sup \mathcal{A} := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Jeżeli dodatkowo $\mu$ nie posiada niepustych zbiorów miary zero (na przykład, gdy $\mu$ jest miarą liczącą), to supremum mierzalne jest wyznacznone jednoznacznie, czyli jest tożsame z sumą.

**Przykład 3.13.** Każda rodzina przeliczalna $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ posiada supremum mierzalne oraz $\sup \mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

**Przykład 3.14.** Niech $(\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą liczącą określoną na $\sigma$-algebrze zbiorów (ko)-przeliczalnych, tzn.

$$\Sigma := \{A \subseteq \Omega : A \text{ przeliczalny lub } \Omega \setminus A \text{ przeliczalny}\}.$$

Miara licząca nie posiada niepustych zbiorów miary zero, więc o ile supremum mierzalne istnieje, to musi być tożsame z $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, patrz Przykład 3.12. Zatem rodzina $\mathcal{A}$ będzie miałą supremum mierzalne wtedy i tylko wtedy gdy $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \Sigma$, czyli gdy suma $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ jest zbiorem przeliczalnym lub koprzeliczalnym.

Następny lemat warto porównać ze Stwierdzeniem 3.8, gdzie rodziny zbiorów zamkniętych na podzbiory i skończone sumy pełnią ważną rolę w konstrukcji miar.

**Lemat 3.15.** *Niech* $(\Omega, \Sigma, \mu)$ *przestrzeń z miarą. Dla dowolnej rodziny* $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$,

$$\overline{\mathcal{A}} := \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k : \Sigma \ni A_k \subseteq B_k \in \mathcal{A}, k = 1, ...., n \in \mathbb{N}\}$$

*jest najmniejszą rodziną zbiorów mierzalnych zawierającą* $\mathcal{A}$ *i zamkniętą na podzbiory i skończone sumy. Ponadto*

$$\sup \mathcal{A} = \sup \overline{\mathcal{A}}$$

*o ile, któreś mierzalne supremum istnieje.*

Dowód. Pierwsza część tezy jest oczywista. Załóżmy, że $\sup\mathcal{A} \in \Sigma$ istnieje. Wtedy dla każdego $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \overline{\mathcal{A}}$ mamy

$$\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k \setminus \sup\mathcal{A}) \leqslant \sum_{k=1}^n \mu(A_k \setminus \sup\mathcal{A}) = 0$$

Poza tym jeśli zbiór $B$ ma również powyższą własność, to tym bardziej $\mu(A \setminus B) = 0$ dla $A \in \mathcal{A}$, skąd $\mu(\sup\mathcal{A} \setminus B) = 0$ (ponieważ $\sup\mathcal{A}$ jest supremum mierzalnym rodziny $\mathcal{A}$). Zatem $\sup\overline{\mathcal{A}}$ istnieje i $\sup\mathcal{A} = \sup\overline{\mathcal{A}}$. Dowód przy założeniu, że $\sup\overline{\mathcal{A}}$ istnieje przebiega analogicznie. □

**Definicja 3.16.** Powiemy, że rodzina $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ funkcji mierzalnych $f_\alpha : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ na przestrzeni z miarą $(\Omega, \Sigma, \mu)$ posiada *supremum mierzalne* jeżeli istnieje funkcja mierzalna $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ taka, że dla $\alpha \in I$ zachodzi $g \geqslant f_\alpha$ $\mu$-prawie wszędzie oraz jeżeli $\tilde{g}$ jest drugą taką funkcją, to $\tilde{g} \geqslant g$ $\mu$-prawie wszędzie.

Funkcja $g$ z powyższymi własnościami (o ile istnieje) jest wyznaczona jednocznanie $\mu$-prawie wszędzie, będziemy nazywać ją *supremum mierzalnym* rodziny $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ i będziemy je oznaczać $\sup_{\alpha\in I} f_\alpha$ lub $\mu\text{-}\sup_{\alpha\in I} f_\alpha$.

**Twierdzenie 3.17.** *Dla dowolnej przestrzeni z miarą $(\Omega, \Sigma, \mu)$ następujące warunki są równoważne:*

*(1) każda rodzina zbiorów $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ posiada supremum mierzalne* $\sup\mathcal{A} \in \Sigma$

*(2) każda rodzina $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ funkcji mierzalnych posiada supremum mierzalne* $\sup_{\alpha\in I} f_\alpha$.

Dowód. (2)$\Longrightarrow$(1). Niech $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ będzie dowolną rodziną. Weźmy rodzinę $\{\mathbb{1}_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ funkcji mierzalnych (bo funkcja charakterystyczna zbioru mierzalnego jest funkcją mierzalną). Zatem istnieje mierzalna funkcja $\sup_{A\in\mathcal{A}} \mathbb{1}_A =: f_\mathcal{A}$ będąca supremum mierzalnym tej rodziny funkcji. W takim razie na zbiorach miary niezerowej $f_\mathcal{A}$ może przyjmować tylko wartości 0 lub 1. Zbiór $S := \{\omega \in \Omega : f_\mathcal{A}(\omega) = 1\}$ jest mierzalny, bo funkcja $f_\mathcal{A}$ mierzalna, oraz dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ zachodzi

$$f_\mathcal{A}\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$$

$\mu$-prawie wszędzie. W konsekwencji $\mu(A \setminus S) = 0$. Założmy, że $B \in \Sigma$ jest innym zbiorem takim, że dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ zachodzi $\mu(A \setminus B) = 0$. Wtedy $\mathbb{1}_B \geqslant \mathbb{1}_A$ $\mu$-prawie wszędzie. Ale funkcja $f_\mathcal{A}$ jest supremum mierzalnym rodziny funkcji $\{\mathbb{1}_A\}_{A\in\mathcal{A}}$, więc musi zachodzić $\mathbb{1}_B \geqslant f_\mathcal{A}$ $\mu$-prawie wszędzie, co implikuje, że $\mu(S \setminus B) = 0$. Ostatecznie zbiór $S$ jest supremum mierzalnym dowolnej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$.

(1)$\Longrightarrow$(2). Niech $A_{\alpha,r} := \{\omega \in \Omega : f_\alpha(\omega) \geqslant r\}$, gdzie $\alpha \in I$ i $r \in \mathbb{Q}$. Z (1), dla każdego $r \in \mathbb{Q}$ istnieje supremum istotne $B_r \in \Sigma$ rodziny $\{A_{\alpha,r}\}_{\alpha\in I}$. Zauważmy, że dla $r < s$ zachodzi $\mu(B_s \setminus B_r) = 0$ (czyli „$B_s \subseteq B_r$ $\mu$-prawie wszędzie"). Jeżeli $C_r := \bigcup_{\mathbb{Q}\ni s>r} B_s$, to $C_r \in \Sigma$ oraz dla $r < s$ zachodzi $C_s \supseteq C_r$ (bez „$\mu$-prawie wszędzie"). Zdefiniujmy $g_r(w) := r$, gdy $\omega \in C_r$, oraz $g_r(w) := -\infty$ w przeciwnym przypadku. Wtedy funkcja

$$g(\omega) := \sup\{g_r(\omega) : r \in \mathbb{Q}\}$$

jest mierzalna jako supremum przeliczalnej ilości funkcji mierzalnych. Musimy pokazać, że $g \geqslant f_\alpha$ prawie wszędzie dla dowolnego $\alpha \in I$. Czyli dla ustalonego $\alpha \in I$ potrzebujemy pokazać, że zbiór $G := \{\omega \in \Omega : g(\omega) < f_\alpha(\omega)\}$ ma miarę zero. Jeśli $g(\omega) < f_\alpha(\omega)$, to istnieje $r, s \in \mathbb{Q}$ takie, że $g(\omega) < r < s < f_\alpha(\omega)$. W tej sytuacji $\omega \in A_{\alpha,s}$ i $\omega \notin C_r$, co oznacza, że $\omega \in \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r<s}} A_{\alpha,s} \setminus C_r$. Dla $r < s$ mamy $C_r \supseteq B_s$. Stąd

$$G \subseteq \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r<s}} A_{\alpha,s} \setminus C_r \subseteq \bigcup_{s\in\mathbb{Q}} A_{\alpha,s} \setminus B_s.$$

Skoro $B_s$ jest supremum istotnym $\{A_{\alpha,s}\}_{\alpha\in I}$, to $\mu(A_{\alpha,s} \setminus B_s) = 0$. Zatem $\mu(G) = 0$, bo $G$ zawiera się w przeliczalnej sumie zbiorów $A_{\alpha,s} \setminus B_s$ o mierze zero. Stąd $g \geqslant f_\alpha$ $\mu$-prawie wszędzie dla dowolnego $\alpha \in I$.

Niech $\tilde{g}$ mierzalna funkcja $g$ taka, że dla $\alpha \in I$ zachodzi $\tilde{g} \geqslant f_\alpha$ prawie wszędzie. Potrzebujemy pokazać, że zbiór $H := \{\omega \in \Omega : g(\omega) > \tilde{g}(\omega)\}$ ma miarę zero. Z definicji $g$ otrzymujemy, że $g(\omega) > \tilde{g}(\omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $r \in \mathbb{Q}$ takie, że $\omega \in C_r$ oraz $r > \tilde{g}(\omega)$. Stąd i z definicji $C_r$

$$H = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} C_r \cap \{\omega : r > \tilde{g}(\omega)\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \bigcup_{\mathbb{Q}\ni s>r} B_s \cap \{\omega : r > \tilde{g}(\omega)\}.$$

Przypomnijmy, że $B_s$ jest supremum istotnym rodziny $\{A_{\alpha,s}\}_{\alpha\in I}$. Z definicji $A_{s,\alpha}$ i stąd, że $\tilde{g} \geqslant f_\alpha$ $\mu$-prawie wszędzie mamy $\mu(A_{s,\alpha} \cap \{\omega : r > \tilde{g}(\omega)\}) = 0$. Czyli $B_s \setminus \{\omega : r > \tilde{g}(\omega)\}$ też jest supremum istotnym rodziny $\{A_{\alpha,s}\}_{f\in F}$. To jest możliwe jedynie, gdy $\mu(B_s \cap \{\omega : r > \tilde{g}(\omega)\}) = 0$. Zatem $H$ jest zbiorem miary zero jako przeliczalna suma takich zbiorów. □

**Wniosek 3.18.** *Każda nieujemna quasi-funkcja mierzalna na przestrzeni z miarą $(\Omega, \Sigma, \mu)$ posiadającej suprema mierzalne pochodzi od funkcji mierzalnej, a mianowicie od supremum mierzalnego elementów quasi-funkcji.*

Dowód. Jesli $\{f_A\}_{A\in\Sigma_\mu}$ quasi-funkcja jak w tezie, to biorą za $f$ supremum istotne, którego istnienie postuluje Twierdzenie 3.17 jest żadaną funkcją. To znaczy dla każdego $A \in \Sigma_\mu$ mamy $f_A = f$ $\mu$-prawie wszędzie na $A$, co wynika z definicji supremum istotnego i stąd, że dla każdego $B \in \Sigma_\mu$ mamy $f_B \leqslant f_A$ $\mu$-prawie wszędzie na $A$. □

Przypomnijmy, iż *siecią* nazywamy dowolną rodzinę elementów indeksowanych zbiorem skierowanym $I$, czyli wyposażonym w częściowy porządek $\leqslant$ taki, że dla każdej pary elementów $\alpha, \beta \in I$ istnieje element je dominujący, czyli $\gamma \in I$ takie, że $\alpha, \beta \leqslant \gamma$. Pojęcie sieci uogólnia pojęcie ciągu; w szczególności zbiór liczb naturalnych ze standardowym porządkiem jest zbiorem skierowanym. Dlatego też poniższe Twierdzenie uogólnia (w przypadku miar lokalizowalnych) fundamentalne dla teorii całki Twierdzenie Leviego o zbieżności monotonicznej.

**Twierdzenie 3.19** (Twierdzenie o zbieżności monotonicznej dla sieci)**.** *Niech* $(\Omega, \Sigma, \mu)$ *będzie przestrzenią z miarą i niech* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *będzie siecią nieujemnych funkcji mierzalnych* $f_\alpha : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$*, która jest monotoniczna w tym sensie, że dla każdych* $\alpha$*,* $\beta \in I$

$$\alpha \leqslant \beta \implies f_\alpha \leqslant f_\beta \quad \mu\text{-prawie wszędzie.}$$

*Jeśli mierzalne supremum* $\sup_\alpha f_\alpha$ *istnieje, to*

$$\int_\Omega \sup_\alpha f_\alpha \, \mathrm{d}\mu = \sup_\alpha \int_\Omega f_\alpha \, \mathrm{d}\mu,$$

*gdzie* $\sup_\alpha f_\alpha$ *jest supremum mierzalnym rodziny* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$*.*

Dowód. Niech $M := \sup_\alpha \int_\Omega f_\alpha \, \mathrm{d}\mu$ i $f := \sup_{\alpha\in I} f_\alpha$. Z definicji $f$, dla każdego $\alpha \in I$ mamy $f_\alpha \leqslant f$ prawie wszędzie, skąd $\int_\Omega f_\alpha \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ i w konsekwencji

$$M \leqslant \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Zatem jesli $M = \infty$, to równość jest spełniona w trywialny sposób. Załóżmy więc, że $M < \infty$. Weźmy ciąg $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ taki, że $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\alpha_n} \mathrm{d}\mu = \sup_\alpha \int_\Omega f_\alpha \, \mathrm{d}\mu = M$. Korzystając z monotoniczności sieci $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ oraz monotoniczności całki możemy założyć, że ciąg funkcji $\{f_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny. Zatem z klasycznego Twierdzenia Leviego o zbieżności monotonicznej otrzymujemy

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\alpha_n} \, \mathrm{d}\mu = M. \tag{3.2}$$

Czyli dowód będzie zakończony jeżeli pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} = f$ prawie wszędzie. Nierówność $\lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} \leqslant f$ prawie wszędzie jest jasna, bo dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $f_{\alpha_n} \leqslant f$ prawie wszędzie. Żeby wykazać nierówność przeciwną wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\alpha \in I$ zachodzi $f_\alpha \leqslant \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n}$ prawie wszędzie. Załóżmy nie wprost, że istnieje takie $\alpha_0 \in I$ takie, że zbiór $A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} < f_{\alpha_0}\}$ ma niezerową miarę. Wtedy

$$\varepsilon := \int_A (f_{\alpha_0} - \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n}) \, d\mu > 0.$$

Ponadto, skoro $\int_A f_{\alpha_0} \mathrm{d}\mu, \int_A \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} \leqslant M < \infty$, to

$$\varepsilon = \int_A f_{\alpha_0} \mathrm{d}\mu - \int_A \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n}.$$

Niech $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\int_\Omega f_{\alpha_N} \mathrm{d}\mu > M - \varepsilon$ i niech $\beta \in I$ takie, że $\alpha_N, \alpha_0 \leqslant \beta$. Wtedy

$$\begin{aligned} M - \varepsilon &< \int_\Omega f_{\alpha_N} \mathrm{d}\mu = \int_A f_{\alpha_N} \mathrm{d}\mu + \int_{\Omega \setminus A} f_{\alpha_N} \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_A \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} \mathrm{d}\mu + \int_{\Omega \setminus A} f_{\alpha_N} \mathrm{d}\mu \\ &< \int_A f_{\alpha_0} \mathrm{d}\mu + \int_{\Omega \setminus A} f_{\alpha_N} \mathrm{d}\mu - \varepsilon \\ &\leqslant \int_A f_\beta \mathrm{d}\mu + \int_{\Omega \setminus A} f_\beta \mathrm{d}\mu - \varepsilon \\ &= \int_\Omega f_\beta \mathrm{d}\mu - \varepsilon \leqslant M - \varepsilon, \end{aligned}$$

co prawdzi do sprzeczności $M - \varepsilon < M - \varepsilon$. Zatem $\lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} = f$ prawie wszędzie, co w połączeniu z (3.2) daje tezę. □

## 3.4 Miary lokalizowalne

**Definicja 3.20.** Niech $(\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Powiemy, że miara $\mu$ jest *ściśle lokalizowalna* lub *rozkładalna* jeżeli $\Omega = \bigsqcup_{i\in I} \Omega_i$ dla pewnej rodziny $\{\Omega_i\}_{i\in I} \subseteq \Sigma$ takiej, że

1) dla każdego $i \in I$
$$\mu(\Omega_i) < \infty,$$

2) dla dowolnego $A \in \Sigma$
$$\mu(A) = \sum_{i\in I} \mu(A \cap \Omega_i),$$

3) $\Sigma = \{A \subseteq \Omega : \ A \cap \Omega_i \in \Sigma \text{ dla każdego } i \in I\}$.

Biorąc za $I := \mathbb{N}$ możemy zauważyć, że warunki $1), 2)$ są spełnione automatycznie. Zatem miara $\sigma$-skończona jest ściśle lokalizowalna (bo $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$).

Następujące stwierdzenie pokaże nam, czemu miarę z poprzedniej definicji możemy nazywać *rozkładalną*.

**Stwierdzenie 3.21.** *Miara $\mu$ jest rozkładalna wtedy i tylko wtedy gdy miara $\mu$ jest sumą prostą miar skończonych.*

Dowód. Załóżmy, że miara $\mu$ jest rozkładalna i niech $\{\Omega_i\}_{i\in I} \subseteq \Sigma$ będzie rodziną spełaniającą warunki opisane w Definicji 3.20. Dla każdego $i \in I$ rodzina $\Sigma_i := \{A \in \Sigma : A \subseteq \Omega_i\}$ jest $\sigma$-algebrą podzbiorów $\Omega_i$ oraz $\mu_i := \mu|_{\Sigma_i}$ jest skończoną miarą na $\Sigma_i$. W ten sposób otrzymujemy rodzinę $\{(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i\in I}$ przestrzeni z miarami skończononymi takimi, że

$$\Omega = \bigsqcup_{i\in I} \Omega_i, \quad \Sigma = \{\bigsqcup_{i\in I} A_i : \ A_i \in \Sigma_i, i \in I\}, \quad \mu(A) = \sum_{i\in I} \mu_i(A \cap \Omega_i), \quad (3.3)$$

$A \in \Sigma$. Czyli przestrzeń $(\Omega, \Sigma, \mu)$ jest sumą prostą przestrzeni $\{(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i\in I}$.

Na odwrót, jeżeli mamy rodzinę $\{(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i\in I}$ przestrzeni z miarami skończonymi, to ich suma prosta, czyli przestrzeń z miarą $(\Omega, \Sigma, \mu)$ spełniająca 3.3, jest w oczywisty sposób miarą ściśle lokalizowalną. □

**Uwaga 3.22.** Zauważmy również, że dowolna miara $\mu$ ściśle lokalizowalna jest semi-skończona, ponieważ jeżeli $0 < \mu(A)$ dla pewnego $A \in \Sigma$, to $A \cap \Omega_i \in \Sigma$. Ale $\mu(\Omega_i) < \infty$, więc tym bardziej $\mu(A \cap \Omega_i) < \infty$ i w konsekwencji $\mu$ jest semi-skończona.

Pojęcie miary ściśle lokalizowalnej pozwala nam uogólnić Twierdzenie 2.15 w zasadzie z tym samym dowodem (warunki w definicji miary ściśle lokalizowalnej są dokładnie takie, żeby dowód Twierdzenia 2.15 pracował).

**Twierdzenie 3.23** (Radona-Nikodyma dla dowolnej miary absolutnie ciągłej względem miary ściśle lokalizowalnej)**.** *Niech $\mu, \nu$ będą miarami na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$, gdzie $\nu$ jest dowolna, a $\mu$ jest ściśle lokalizowalna. Jeżeli $\nu \ll \mu$ to istnieje pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$.*

*Ponadto, pochodna $\frac{d\nu}{d\mu}$ jest wyznaczona jednoznacznie $\mu$-prawie wszędzie i jest $\mu$-prawie wszędzie skończona na zbiorach, na których miara $\nu$ jest $\sigma$-skończona.*

Dowód. Niech $\{\Omega_i\}_{i\in I} \subseteq \Sigma$ będzie rodziną spełaniającą warunki opisane w Definicji 3.20. Na mocy Twierdzenia 2.15, zastosowanego do miar skończonych $\nu$ i $\mu$ obciętych do zbioru $\Omega_i$, otrzymujemy funkcje $f_i : \Omega_n \to \overline{\mathbb{R}}^+$ wyznaczone $\mu$-prawie wszędzie, dla których

$$\nu(A) = \int_A f_i \, \mathrm{d}\mu, \quad A \in \Sigma, \ A \subseteq \Omega_i, \ i \in I,$$

oraz $f_i$ przyjmuje wartości skończone na zbiorach, na których miara $\nu$ jest $\sigma$-skończona. Kładąc $f_0 = \sum_{i\in I}^{\infty} f_i \cdot \mathbb{1}_{\Omega_i}$ otrzymujemy poprawnie określoną funkcję $\Sigma$-mierzalną, gdyż na mocy warunku 3) w Definicji 3.20 dla każdego mierzalnego $A \subseteq \mathbb{R}^+$ dostajemy

$$f_0^{-1}(A) = \bigsqcup_{i\in I} f_i^{-1}(A) \cap \Omega_i \in \Sigma.$$

Funkcja $f_0$ jest $\mu$-prawie wszędzie skończona na zbiorach, na których miara $\nu$ jest $\sigma$-skończona (bo każde z obcięć $f_i = f_0|_{\Omega_i}$ ma tę własność). Rozważmy sieć sum częściowych $\sum_{i\in F} f_i \cdot \mathbb{1}_{\Omega_i} = f_0|_{\bigsqcup_{i\in F} \Omega_i}$ poindeksowanych skończonymi podzbiorami $F \subseteq I$ skierowanych za pomocą relacji inkluzji. Jasne jest, że $f_0$ jest mierzalnym supremum $\sup_F \sum_{i\in F} f_i \cdot \mathbb{1}_{\Omega_i}$ tej sieci i że sieć ta jest monotoniczna. Zatem możemy zastosować Twierdzenie 3.19 do funkcji obiętych do dowolnego $A \in \Sigma$. Wtedy stosując również warunek 2) z Definicji 3.20, mamy

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \sum_{i\in I} \nu(A\cap\Omega_i) = \sum_{i\in I} \int\limits_{A\cap\Omega_i} f_i \mathrm{d}\mu = \sup_F \sum_{i\in F} \int\limits_{A\cap\Omega_i} f_i \mathrm{d}\mu \\ &= \sup_F \int\limits_A \sum_{i\in F} f_i \cdot \mathbb{1}_{\Omega_i}\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A \sup_F \sum_{i\in F} f_i \cdot \mathbb{1}_{\Omega_i}\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A \left(\sum_{i\in I} f_i \mathbb{1}_{\Omega_i}\right)\mathrm{d}\mu \\ &= \int\limits_A f_0\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Zatem $f_0$ jest szukaną pochodną Radona-Nikodyma. Funkcja ta jest wyznaczona $\mu$-jednoznacznie na każdym ze zbiorów $\Omega_i$, a więc i na całej przestrzeni $\Omega$ (znowu na mocy warunku 2) w Definicji 3.20). □

**Definicja 3.24.** Powiemy, że miara $\mu$ jest *lokalizowalna*, jeżeli $\mu$ jest semi-skończona i dla dowolnej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ istnieje supremum mierzalne $\sup \mathcal{A} =: A_0 \in \Sigma$ (patrz Definicja 3.10).

**Lemat 3.25.** *Semi-skończona miara $\mu$ jest lokalizowalna (każda rodzina podzbiorów mierzalnych posiada mierzalne supremum istotne) wtedy i tylko wtedy, gdy każda rodzina rodzina zbiorów o mierze skończonej posiada mierzalne supremum.*

Dowód. Niech $\mathcal{F}_\mu := \{B \in \Sigma : \mu(B) < \infty\}$ rodzina zbiorów o mierze skończonej. Załóżmy, że każda rodzina zbiorów z $\mathcal{F}_\mu$ posiada mierzalne supremum istotne. Niech $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ dowolna rodzina i niech

$$\mathcal{A}_0 := \{B \in \mathcal{F}_\mu : B \subseteq A \text{ dla pewnego } A \in \mathcal{A}\}$$

Na mocy założenia $\sup \mathcal{A}_0$ istnieje. Pokażemy, że $\sup \mathcal{A}_0 = \sup \mathcal{A}$.

Niech $A \in \mathcal{A}$. Gdyby $\mu(A \setminus \sup \mathcal{A}_0) > 0$, to z semi-skończoności $\mu$, istniałby $B \in \mathcal{F}_\mu$ taki, że $B \subseteq A \setminus \sup \mathcal{A}_0$ oraz $0 < \mu(B) < \infty$. Ale wtedy $B \in \mathcal{A}_0$ i $\mu(B \setminus \sup \mathcal{A}_0) = \mu(B) > 0$, co jest sprzeczne z definicją $\sup \mathcal{A}_0$. Zatem $\mu(A \setminus \sup \mathcal{A}_0) = 0$. Co więcej, jeśli jakiś inny zbiór $A_0$ ma tę własność, że $\mu(A \setminus A_0) = 0$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$, to tym bardziej $\mu(B \setminus A_0) = 0$ dla każdego $B \in \mathcal{A}_0$, skąd $\mu(\sup \mathcal{A}_0 \setminus A_0) = 0$. Czyli $\sup \mathcal{A}_0 = \sup \mathcal{A}$. □

**Twierdzenie 3.26.** *Miara ściśle lokalizowalna jest lokalizowalna.*

Dowód. Niech $(\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą ściśle lokalizowalną, niech $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ dowolną rodziną zbiorów mierzalnych i niech $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną opisaną w definicji miary ściśle lokalizowalnej ( Definicja 3.20). Oznaczmy poprzez $\mathcal{F}$ rodzinę mierzalnych zbiorów $E \subseteq \Omega$ takich, że $\mu(F \cap A) = 0$

dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Zauważmy, że zbiór pusty należy do $\mathcal{F}$ i jeżeli $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem w $\mathcal{F}$ to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$. Dla każdego $i \in I$ zdefiniujmy $\gamma_i := \sup\{\mu(F \cap \Omega_i) : F \in \mathcal{F}\}$ i weźmy ciąg $\{F_{in}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ realizujący to supremum, tzn $\lim_{n\to\infty} \mu(F_{in} \cap \Omega_i) = \gamma_i$. Zauważmy, że $F_i := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{in} \in \mathcal{F}$ i skoro $\Sigma = \{A \subseteq \Omega : A \cap \Omega_i$ dla każdego $i \in I\}$ to

$$F := \bigcup_{i\in I} F_i \cap \Omega_i \subseteq \Omega.$$

Połóżmy $S := \Omega \setminus F$ i musimy teraz pokazać, że ten zbiór jest mierzalnym supremum rodziny $\mathcal{A}$. Jako, że $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ są rozłączne to dla każdego $i \in I$ zachodzi $F \cap \Omega_i = F_i \cap \Omega_i$. Zatem $F \in \Sigma$ i $S \in \Sigma$. Dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ zachodzi

$$\mu(A\setminus S) = \mu(A\setminus(\Omega\setminus F)) = \mu(A\cap F) = \sum_{i\in I} \mu(A\cap F\cap\Omega_i) = \sum_{i\in I} \mu(A\cap F_i\cap\Omega_i) = 0,$$

ponieważ $F_i \in \mathcal{F}$ i w szczególności $F \in \mathcal{F}$. Załóżmy teraz, że $P \in \Sigma$ jest drugim zbiorem takim, że $\mu(A \setminus P) = 0$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Wtedy $D := \Omega \setminus P \in \mathcal{F}$ (bo $\mu(A\cap D) = \mu(A\setminus P) = 0$) i stąd $F\cup D \in \mathcal{F}$. W związku z tym dla każdego $i \in I$ mamy

$$\mu((F \cup D) \cap \Omega_i) \leqslant \sup_{E\in\mathcal{F}} \mu(E \cap \Omega_i) = \mu(F_i \cap \Omega_i) = \mu(F \cap \Omega_i),$$

czyli $\mu((F \cup D) \cap \Omega_i) = \mu(F \cap \Omega_i)$. Możemy teraz wziąć

$$\mu(F \cap \Omega_i) + \mu(D \setminus F \cap \Omega_i) = \mu((F \cup D) \cap \Omega_i) = \mu(F \cap \Omega_i),$$

i skoro $\mu(\Omega_i) < \infty$, to po zredukowaniu da nam $\mu(D\setminus F\cap\Omega_i) = 0$. Teraz łącząc to z definicją ścisłej lokalizowalności $\mu(D \setminus F) = \sum_{i\in I} \mu(D \setminus F \cap \Omega_i) = 0$. Stąd

$$\mu(S \setminus P) = \mu(S \cap (\Omega \setminus P)) = \mu(S \cap D) = \mu((\Omega \setminus F) \cap D) = \mu(D \setminus F) = 0,$$

czyli faktycznie istnieje $S$ będące mierzalnym supremum rodziny $\mathcal{A}$. Zatem z dowolności $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ i z Uwagi 3.22 otrzymujemy, że miara $\mu$ jest lokalizowalna. □

## 3.5 Twierdzenie Segala i jego uogólnienie

Niech $\nu, \mu$ miary na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$. Przypomnijmy, patrz Wniosek 3.9, że $\nu$ jest *$\mu$-semi-skończona*, jeżeli dla dowolnego $B \in \Sigma$ zachodzi

$$\nu(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A, \mu(B) < \infty\}.$$

Czyli gdy $\mu$ i $\nu$ są zdeterminowane przez swoje wartości na pierścieniu $\mathcal{F}_\mu := \{B \in \Sigma : \mu(B) < \infty\}$ zbiorów o $\mu$-miary skończonej. W tej definicji zamiast pierścienia $\mathcal{F}_\mu$ można wziąć $\sigma$-pierścień $\Sigma_\mu = \{\bigcup_{n=1}^\infty A_n : \mu(A_n) < \infty, n \in \mathbb{N}\}$ zbiorów o $\mu$-mierze $\sigma$-skończonej. Otrzymane warunki byłyby równoważne, gdyż dla kazdej miary $\nu$ i zbioru $A \in \Sigma$ mamy

$$\sup\{\nu(B) : B \subseteq A, \mu(B) < \infty\} = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A, B \in \Sigma_\mu\}.$$

Nierówność $\leqslant$ jest oczywista. Natomiast nierówność przeciwna wynika stąd, że dla dowolnego $B \in \Sigma_\mu$ mamy $B = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ oraz $\nu(B) = \lim_{N\to\infty} \nu(\bigcup_{n=1}^N A_n)$ gdzie $\mu(\bigcup_{n=1}^N A_n) < \infty$. W szczególności $\sup\{\nu(C) : C \subseteq B, \mu(C) < \infty\}$.

Segal rozpatrywał nieco mocniejszy warunek (gdyż dla niego miary z definicji były określone na tym samym pierścieniu zbiorów o mierze skończonej), który można wysłowić jak następuje.

**Definicja 3.27** (Segal)**.** Powiemy, że $\nu, \mu$ miary na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$ są *wspólnie semi-skończone*, jeżeli dla pierścienia

$$\mathcal{F}_{\mu,\nu} := \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty,\ \nu(A) < \infty\}$$

zbiorów dla których obie miary są skończone, oraz dowolnego $A \in \Sigma$ zachodzi

$$\nu(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A, B \in \mathcal{F}_{\mu,\nu}\},$$
$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, B \in \mathcal{F}_{\mu,\nu}\}.$$

Jasne jest, że jeżeli miary $\nu, \mu$ są wspólnie semi-skończone to $\nu$ jest $\mu$-semi-skończona oraz $\mu$ jest $\nu$-semi-skończona. Czy zachodzi implikacje przeciwna?

**Przykład 3.28.** Rozważmy na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, 2^\Omega)$ miarę liczącą $\mu$ i miarę trywialną $\nu$ taką, że $\nu(A) = \infty$ dla $A \neq \emptyset$. Wtedy $\mathcal{F}_\mu$ składa się ze zbiorów skończonych, matomiast $\mathcal{F}_{\mu,\nu} = \{\emptyset\}$. W szczególności $\nu$ jest $\mu$-semi-skończone, ale $\nu$ i $\mu$ nie są wspólnie semi-skończone (bo $\mu$ nie jest $\nu$-semi-skończona). Zauważmy, że $\nu \ll \mu$.

Powyższy przykład pokazuje, że wspólna semi-skończoność jest istotnie silniejszym założeniem niż $\mu$-semi-skończoność. W szczególności następujące Twierdzenie jest silniejsze niż Twierdzenie Segala, bo zachodzi przy słabszych założeniach:

**Twierdzenie 3.29** (Uogólnione Twierdzenie Radona-Nikodyma-Segala)**.** *Dla dowolnej przestrzeni z miarą $(\Omega, \Sigma, \mu)$, w której każda rodzina posiada supremum mierzalne, oraz dla dowolnej miary $\nu$ na $(\Omega, \Sigma)$ absolutnie ciągłej i $\mu$-semi-skończonej istnieje pochodna Radon-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$.*

*Jeśli dodatkowo $\mu$ jest semi-skończona (czyli lokalizowalna), to pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu}$ jest wyznaczona jednoznacznie $\mu$-prawie wszędzie.*

Dowód. Niech $\mathcal{F} := \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\}$. Na mocy Wniosku 3.18 quasi-funkcja $\{f_A\}_{A\in\mathcal{F}}$ z Twierdzenia 3.3 pochodzi od funkcji mierzalnej $f_0 : \Omega \to$

$\overline{\mathbb{R}}^{+}$. Dokładniej $\nu(B) = \int_\Omega f_B\, d\mu = \int_B f_0\, d\mu$ dla $B \in \mathcal{F}$ oraz $f_0 = \sup_{B\in\mathcal{F}} f_B$. Zauważmy, że dla dowolnego $A \in \Sigma$ mamy

$$f_0 \mathbb{1}_A = \sup_{B\in\mathcal{F}} (f_B \mathbb{1}_A) = \sup_{B\in\mathcal{F}, B\subseteq A} f_B.$$

Ponadto rodzina $\{f_B\}_{B\in\mathcal{F},B\subseteq A}$ jest monotoniczną siecią funkcji mierzalnych. Zatem z Twierdzenia 3.19 (o zbieżności monotonicznej) wynika, że

$$\int_A f_0 \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_0 \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \sup_{B\in\mathcal{F}, B\subseteq A} \int_\Omega f_B\, d\mu.$$

Skoro $\nu$ jest $\mu$-semi-skończone oraz $\Sigma_0 \subseteq \mathcal{F}$, to

$$\nu(A) = \sup_{B\in\mathcal{F}, B\subseteq A} \nu(B) = \sup_{B\in\mathcal{F}, B\subseteq A} \int_\Omega f_B\, \mathrm{d}\mu = \int_A f_0 \mathrm{d}\mu.$$

Zatem $f_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$ jest szukaną pochodną Radona-Nikodyma.

Żeby wykazać jednoznaczność, niech $\tilde{f}_0$ będzie inną pochodną Radona-Nikodyma $\nu$ względem $\mu$. Z jednoznaczności quasi-funkcji $\{f_A\}_{A\in\mathcal{F}}$ mamy $\tilde{f}_0 \cdot \mathbb{1}_A = f_A = f_0 \cdot \mathbb{1}_A$ $\mu$-prawie wszędzie dla każdego $A \in \mathcal{F}$. Zatem każdy zbiór $A \subseteq \{\omega : f_0 \neq \tilde{f}_0\}$ o $\mu$-mierze skończonej musi mieć miarę zerową. Stąd i na mocy semi-skończoności $\mu$ mamy

$$\mu(\{\omega : f_0 \neq \tilde{f}_0\}) = \sup\{\mu(A) : A \subseteq \{\omega : f_0 \neq \tilde{f}_0\}, A \in \mathcal{F}\} = 0.$$

Zatem $f_0 = \tilde{f}_0$ $\mu$-prawie wszędzie. □

Ograniczając się do miar semi-skończonych powyższe twierdzenie pozwala ulepszyć Twierdzenie Segala w następujący sposób.

**Twierdzenie 3.30** (Twierdzenie Radona-Nikodyma-Segala)**.** *Dla semi-skończonej miary $\mu$ na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$ następujące warunki są równoważne:*

*1) $\mu$ jest miarą lokalizowalną,*

*2) dla dowolnej miary $\nu$ na $(\Omega, \Sigma)$ absolutnie ciągłej i $\mu$-semi-skończonej istnieje pochodna Radon-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$.*

*3) dla dowolnej miary $\nu$ na $(\Omega, \Sigma)$ absolutnie ciągłej i wspólnie semi-skończonej z $\mu$ istnieje pochodna Radon-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$.*

*Ponadto pochodna Radona-Nikodyma w 2) i 3) jest wyznaczona jednoznacznie $\mu$-prawie wszędzie.*

Dowód. Implikacja 1)⇒2) wynika z Twierdzenia 3.29, a implikacja 2)⇒3) jest oczywista.

3)⇒1). Na mocy Lematu 3.25 wystarczy pokazać, że dowolna rodzina zbiorów $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_\mu := \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\}$ posiada mierzalne supremum istotne w

$\Sigma$. W świetle Lematu 3.15 możemy założyć, że rodzina $\mathcal{A}$ jest zamknięta na skończone sumy i podzbiory. Wtedy korzystając ze Stwierdzenia 3.8 widzimy, że wzór

$$\nu(A) := \sup\{\mu(B) : B \subseteq A,\ B \in \mathcal{A}\}$$

definiuje miarę na $(\Omega, \Sigma)$. Z konstrukcji widzimy, że $\nu \leqslant \mu$ oraz $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_{\mu,\nu} = \mathcal{F}_\mu \subseteq \mathcal{F}_\nu$. Stąd $\mu$ i $\nu$ są wspólnie semi-skończone. Zatem na mocy założenia istnieje pochodna Radona-Nikodyma $f_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$. Pokażemy, że zbiór

$$A_0 := \{\omega : f(\omega) > 0\}$$

jest mierzalnym supremum $\mathcal{A}$. Rzeczywiście, niech $B \in \mathcal{A}$. Gdyby $\mu(B \setminus A_0) > 0$, to stąd, że $B \setminus A_0 \in \mathcal{A}$ i definicji $\nu$ mielibyśmy $\nu(B \setminus A_0) > 0$, co prowadzi do sprzeczności

$$0 < \nu(B \setminus A_0) = \int_{B \setminus A_0} f_0 \, d\mu = \int_{B \setminus A_0} 0 \, d\mu = 0.$$

Zatem $\mu(B \setminus A_0) = 0$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Ponadto jeśli $B_0 \in \Sigma$ jest innym zbiorem o tej własności, to musimy mieć $\mu(A_0 \setminus B_0) = 0$, bo dla każdego $B \subseteq A_0 \setminus B_0$, $B \in \mathcal{A}$ mamy $\mu(B) = \mu(B \setminus B_0) = 0$, skąd

$$\int_{A_0 \setminus B_0} f_0 \, d\mu = \nu(A_0 \setminus B_0) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A_0 \setminus B_0,\ B \in \mathcal{A}\} = 0.$$

Ale skoro $f_0 > 0$ na $A_0 \setminus B_0$ to jest to możliwe jedynie, gdy $\mu(A_0 \setminus B_0) = 0$. Zatem $A_0 = \sup \mathcal{A}$. □

## 3.6 Twierdzenie Lewinów

W tym podrozdziale omówimy wersję Twierdzenia Radona-Nikodyma z pracy Lewinów [11], którzy zauważyli, że w przypadku, gdy miara dominowana $\nu$ jest skończona, to pochodna Radona-Nikodyma istenieje wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek, który jest bardzo bliski naszej definicji semi-skończoności jednej miary względem drugiej, patrz Definicja 3.5.

**Definicja 3.31** ([11]). Niech $\mu$ i $\nu$ będą miarami na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$. Powiemy, że $\nu$ jest *kompatybilna* z $\mu$, jeżeli dla każdego $A \in \Sigma$

$$0 < \nu(A) < \infty \implies 0 < \nu(B) \text{ oraz } \mu(B) < \infty \text{ dla pewnego } B \subseteq A.$$

**Wniosek 3.32.** *Jedyna różnica między $\mu$-semi-skończonością, a kompatybilnością z $\mu$, jest to że w tym pierwszym przypadku w poprzedniku implikacji zakładamy jedynie, że $0 < \nu(A)$ (dopuszczamy przypadek, gdy $\nu(A) = \infty$). Zatem*

$$\nu \text{ jest } \mu\text{-semi-skończona} \implies \nu \text{ jest kompatybilna z } \mu.$$

*Oczywiście oba pojęcia są rownoważne, jeśli miara $\nu$ jest skończona, a nawet ogólniej jeśli miara $\nu$ jest semi-skończona. Rzeczywiście, jeśli $\nu$ jest semi-skończona oraz kompatybilna z $\mu$, to dla dowolnego $A \in \Sigma$ mamy*

$$\begin{aligned} 0 < \nu(A) &\Longrightarrow 0 < \nu(B) < \infty \text{ dla pewnego } B \subseteq A \\ &\Longrightarrow 0 < \nu(C) \text{ oraz } \mu(C) < \infty \text{ dla pewnego } C \subseteq B \subseteq A. \end{aligned}$$

*Zatem $\nu$ jest $\mu$-semi-skończona.*

Kompatybilność miar jest o tyle ważna, że jest warunkiem koniecznym na to, aby zachodziło Twierdzenie Radona-Nikodyma.

**Stwierdzenie 3.33.** *Jeśli istnieje pochodna Radona-Nikodyma miary $\nu$ względem $\mu$, to $\nu$ jest kompatybilna z $\mu$.*

Dowód. Jeśli $0 < \nu(A) < \infty$, czyli $0 < \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu < \infty$, to istnieje nieujemna mierzalna funkcja prosta $f = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \leqslant \mathbb{1}_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$ taka, że

$$0 < \int_\Omega f d\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu(A_i) < \infty.$$

Przy czym, możemy tu założyć, że zbiory $A_i \subseteq A$ są parami rozłączne oraz $a_i > 0$. Wtedy dla $B := \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ mamy $B \subseteq A$, $0 < \mu(B) < \infty$ oraz

$$\nu(B) = \int_B \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \geqslant \int_B f d\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu(A_i) > 0.$$

Zatem $\nu$ jest kompatybilna z $\mu$. □

Najważniejszy wynik [11, Twierdzenie 2.2] z pracy Lewinów [11], którego dowód jest bardzo prosty, mówi, że jeśli miara $\nu$ jest skończona, to kompatybilność z $\mu$ jest nie tylko warunkiem koniecznym, ale i dostatecznym na istnienie pochodnej Radona-Nikodyma:

**Twierdzenie 3.34** (Twierdzenie Lewinów)**.** *Jeśli $\nu$ jest skończoną miarą absolutnie ciągłą względem $\mu$ oraz kompatybilną z $\mu$, to istnieje pochodna Radona-Nikodyma i jest wyznaczona jednoznacznie $\mu$-prawie wszędzie.*

Dowód. Oznaczmy przez $\Sigma_\mu := \{A \in \Sigma : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \mu(A_n) < \infty\}$ rodzinę zbiorów o $\mu$-mierze $\sigma$-skończonej. Połóżmy

$$\alpha := \sup\{\nu(A) : A \in \Sigma_\mu\}.$$

Wybierzmy ciąg $\{A_n\}_{n=1} \subseteq \Sigma_\mu$ taki, że $\nu(A_n) \to \alpha$. Kładąc $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ otrzymujemy zbiór $A \in \Sigma_\mu$ taki, że $\nu(A) = \alpha$. Kompatybilność $\nu$ z $\mu$ implikuje, że $\nu(\Omega \setminus A) = 0$. Rzeczywiście, w przeciwnym razie istniałby zbiór $B \subseteq \Omega \setminus A$ taki, że $\nu(B) > 0$ oraz $\mu(B) < \infty$, czyli $A \cup B \in \Sigma_\mu$ oraz $\nu(A \cup B) > \nu(A) = \alpha$, co jest sprzeczne z definicją $\alpha$.

Na zbiorze $A$ miara $\mu$ jest $\sigma$-skończona, zatem stosując Twierdzenie Radona-Nikodyma dla miar $\sigma$-skończonych (Twierdzenie 2.15) do miar $\nu$, $\mu$ obciętych do zbioru $A$ otrzymujemy, że istnieje dokładnie jedna (z dokładnością do równości $\mu$-prawie wszędzie) funkcja mierzalna $f_0 : A \to [0, \infty)$ taka, że $\nu(B) = \int_B f_0 \, d\mu$ dla każdego mierzalngo $B \subseteq A$. Połóżmy, $f_0 \equiv 0$ na $\Omega \setminus A$. Wtedy $f_0 : \Omega \to [0, \infty)$ jest funkcją mierzalną oraz dla dowolnego $B \in \Sigma$ mamy

$$\nu(B) = \nu(B \cap A) = \int_{A \cap B} f_0 \, d\mu = \int_B f_0 \, d\mu.$$

Zatem $f_0$ jest pochodną Radona-Nikodyma $\nu$ względem $\mu$. Ponadto zauważmy, że każda pochodna Radona-Nikodyma $\nu$ względem $\mu$ musi być równa zero $\mu$-prawie wszędzie na zbiorze $\Omega \setminus A$, bo $\nu(\Omega \setminus A) = 0$. Zatem pochodna $\frac{d\mu}{d\nu}$ jest wyznaczona jednocznanie $\mu$-prawie wszędzie. $\square$

Można pokazać, że powyższe twierdzenie nie zachodzi jeżeli założenie o skończoności $\nu$ zastąpimy semi-skończonością, a nawet ścisłą lokalizowalnością. W przykładzie [11, Przykład 2] miara $\nu$ jest ściśle lokalizowalna, $\nu \ll \mu$, $\nu$ jest kompatybilne z $\mu$, ale pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu}$ nie istnieje. W świetle Wniosku 3.32 oraz Twierdzenia 3.29 miara $\mu$ w tym przykładzie nie jest lokalizowalna.

Teraz przeformułujemy i ogólnimy Twierdzenie Lewinów na przypadek, gdy miara $\nu$ jest $\sigma$-skończona. Dodamy tu dla porownania nasz warunek $\mu$-semi-skończoności.

**Twierdzenie 3.35** (Uogólnione Twierdzenie Radona-Nikodyma-Lewinów)**.** *Niech $\nu$ i $\mu$ będą miarami na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \Sigma)$ i niech $\nu$ będzie $\sigma$-skończona. Następujące warunki są równoważne:*

*1) istnieje pochodna Radona-Nikodyma $\nu$ względem $\mu$,*

*2) $\nu \ll \mu$ oraz $\nu$ jest kompatybilna z $\mu$, czyli dla każdego $A \in \Sigma$*

$$0 < \nu(A) < \infty \implies 0 < \nu(B) \text{ oraz } 0 < \mu(B) < \infty \text{ dla pewnego } B \subseteq A.$$

*3) $\nu \ll \mu$ oraz $\nu$ jest $\mu$-semi-skończona, czyli dla każdego $A \in \Sigma$*

$$0 < \nu(A) \implies 0 < \nu(B) \text{ oraz } 0 < \mu(B) < \infty \text{ dla pewnego } B \subseteq A.$$

*Ponadto jeśli powyższe równoważne warunki zachodzą, to pochodna Radona-Nikodyma jest wyznaczona jednoznacznie $\mu$-prawie wszędzie.*

Dowód. Implikacja 1)⇒2) wynika ze Stwierdzenia 3.33. Warunki 2) i 3) są równoważne na mocy założenia, że $\nu$ jest miarą $\sigma$-skończoną, patrz Wniosek 3.32. Wystarczy zatem pokazać implikację 3)⇒1).

Załóżmy zatem 3). Jako że $\nu$ jest $\sigma$-skończona, to istnieje przeliczalne rozbicie $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ przestrzeni $\Omega$ na zbiory $\nu$-mierze skończonej. Stosując Twierdzenie

Lewinów do miar $\nu$ i $\mu$ obciętych do zbioru $\Omega_i$ otrzymujemy funkcję mierzalną $f_i : \Omega_i \to [0, \infty)$ taką, że $\nu(A) = \int_A f_i \, d\mu$ dla każdego mierzalnego $A \subseteq \Omega_i$. Połóżmy $f(x) = f_i(x)$ jeśli $x \in \Omega_i$. Wtedy $f : \Omega \to [0, \infty)$ jest funkcją mierzalną i dla dowolnego $A \in \Sigma$ mamy $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A \cap \Omega_i$, skąd

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A \cap \Omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A \cap \Omega_i} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Zatem $f$ jest pochodną Radona-Nikodyma miary $\nu$ względem $\mu$. Jednoznaczność funkcji $f_i$ wynika z Twierdzenia Lewinów i stąd dostajemy jednoznaczność pochodnej Radona-Nikodyma $f$. $\square$

# Rozdział 4

# Zastosowania do operatorów w przestrzeniach Lp

## 4.1 Warunkowe wartości oczekiwane

Warunkowe wartości oczekiwane definiuje się zazwyczaj dla całkowalnych zmiennych losowych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Czyli dla elementów $f \in L_1(\mu)$ rzeczywistej przestrzeni $L_1(\mu)$, gdzie $\mu(\Omega) = 1$ jest miarą unormowaną, a w szczególności skończoną. Ogólnie wartość oczekiwaną (w skrócie WWO) względem $\sigma$-podalgebry $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ definiuje się aksjomatycznie. Następnie wykazuje się, że WWO zawsze istnieje i jest wyznaczone jednoznacznie jako element $L_1(\mu)$, patrz np. [2]. Korzystając z Twierdzenie Radona-Nikodyma-Lewinów scharakteryzujemy teraz kiedy warunkowa wartość oczekiwana istnieje dla dowolnych miar.

**Definicja 4.1.** Dla dowolnej przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ oraz dowolnej $\sigma$-algebry $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *warunkową wartość oczekiwaną* $f$ względem $\mathcal{G}$ definiuje się aksjomatycznie jako funkcję $E(f) \in L_1(\mu)$ spełniającą następujące warunki:

(1) $E(f)$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna,

(2) Dla każdego zbioru $A \in \mathcal{F}$ mamy $\int_A E(f)\, d\mu = \int_A f\, d\mu$.

**Uwaga 4.2.** Powyższa definicja jest uogólnieniem Definicji 2.12, porównaj Wniosek 2.13.

**Twierdzenie 4.3.** *Dla dowolnej przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, dowolnej $\sigma$-algebry $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ oraz dowolnej nieujemenej funkcji całkowalnej $f \in L_1(\mu)$ rozważmy miarę*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \qquad A \in \mathcal{G},$$

*na $\sigma$-algebrze $\mathcal{G}$. Następujące warunki są równoważne*

*1) warunkowa wartość oczekiwana $E(f)$ względem $\mathcal{G}$ istnieje,* *2) miara $\nu$ jest $\mu|_{\mathcal{G}}$-semi-skończona,*

*3) miara $\nu$ jest kompatybilna z $\mu|_{\mathcal{G}}$,*

*4) istnieje pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{G}}}$.*

*Jeśli powyższe równoważne warunki zachodzą, to $E(f) \overset{\mu}{=} \frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{G}}}$, w szczególności funkcja ta jest wyznaczona jednoznacznie prawie wszędzie.*

Dowód. 1)⇒2). Skoro $E(f)$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna i $\mu|_{\mathcal{G}}$-prawie wszędzie nieujemna, to istnieje $\mathcal{G}$-mierzalna funkcja prosta $0 \leqslant s \leqslant f$ taka, że $0 < \int_A s\,d\mu < \infty$. Rozpisując $s$ jako kombinację liniową funkcji charakterystycznych zbiorów z $\mathcal{G}$ wnioskujemy, że istnieje $B \in \mathcal{G}$ takie, że $B \subseteq A$, $\mu(B) < \infty$ oraz $\nu(B) = \int_B f\,d\mu = \int_B E(f)\,d\mu \geqslant \int_B s\,d\mu > 0$. Zatem $\nu$ jest $\mu|_{\mathcal{G}}$-semi-skończona.

2)⇒3). Ta implikacja jest oczywista.

3)⇒4). Jasne jest że $\nu \ll \mu|_{\mathcal{G}}$ oraz $\nu$ jest skończona (bo $f$ jest całkowalna). Zatem pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{G}}}$ istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie na mocy Twierdzenia Lewinów (Twierdzenie 3.34).

4)⇒1). Kładąc $E(f) := \frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{G}}}$ otrzymujemy funkcją $\mathcal{G}$ mierzalną oraz dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ mamy

$$\int_A E(f)\,d\mu = \int_A \frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{G}}}\,d\mu = \int_A \frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{G}}}\,d\mu|_{\mathcal{G}} = \int_A d\nu = \nu(A).$$

Zatem $E(f)$ jest WWO względem $\mathcal{G}$.

Aby wykazać jednoznaczność warunkowej wartości oczekiwanej załóżmy, że $\tilde{E}(f)$ jest jakimś wariantem warunkowej wartości oczekiwanej. Wtedy zbiór $A := \{t \in \Omega : E(f)(t) < \tilde{E}(f)\}$ należy do $\mathcal{G}$, bo obie funkcje $E(f)(t)$, $\tilde{E}(f)$, są $\mathcal{G}$-mierzalne. Zatem

$$\int_A E(f)d\mu = \int_A f d\mu = \int_A \tilde{E}(f)d\mu.$$

Stąd $\int_A(\tilde{E}(f) - E(f))d\mu = 0$. Ale $\tilde{E}(f) - E(f) > 0$ na $A$. Stąd $\mu(A) = 0$, czyli $E(f)(t) \geqslant \tilde{E}(f)$ $\mu$-prawie wszędzie. Analogicznie, amieniając $E(f)$ i $\tilde{E}(f)$ rolami, można pokazać, że $E(f)(t) \leqslant \tilde{E}(f)$ $\mu$-prawie wszędzie. Zatem $E(f)(t) = \tilde{E}(f)$ $\mu$-prawie wszędzie. □

Warunkowa wartość oczekiwana nie zawsze istnieje:

**Przykład 4.4.** Niech $\mu$ będzie miarą Lebesgue'a na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i niech $\mathcal{G} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Zauważmy, że $L_1(\mu|_{\mathcal{G}}) = \{0\}$ jest przestrzenią zerową, bo funkcje $\mathcal{G}$-mierzalne są stałe i jedyną $\mu$-całkowalną funkcją stałą jest funkcja zerowa. Zatem jeśli $f \in L_1(\mu)$ posiada warunkową wartość oczekiwaną, to $E(f) = 0$ i stąd $\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} E(f)\,d\mu = 0$. Zatem każda całkowalna nieujemna funkcja $f \in L_1(\mu)$, która nie jest równa zero $\mu$-prawie wszędzie nie posiada warunkowej wartości oczekiwanej.

Stosując Twierdzenie Radona-Nikodyma dla miar ściśle lokalizowalnych (Twierdzenie 3.23) otrzymujemy następujący użyteczny warunek dostateczny na isteninie warunkowej wartości oczekiwanej dla każdej funkcji całkowalnej.

**Twierdzenie 4.5.** *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie dowolną przestrzenią z miarą i niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie $\sigma$-algebrą taką, że $\mu|_{\mathcal{G}}$ jest ściśle lokalizowalna. Wtedy dla każdej funkcji $f \in L_1(\mu)$ warunkowa wartość oczekiwana $E(f)$ względem $\mathcal{G}$ istnieje, i jest wyznaczona jednoznacznie $\mu$-prawie wszędzie.*

*Ponadto warunkowa wartość oczekiwana $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu|_{\mathcal{G}}) \subseteq L_1(\mu)$ jest liniowym rzutem na podprzestrzeń całkowalnych funkcji $\mathcal{G}$-mierzalnych oraz*

*(1) operator $E$ jest dodatni, czyli $f \geqslant 0 \implies E(f) \geqslant 0$.*

*(2) operator $E$ jest monotoniczny, czyli $f \leqslant g \implies E(f) \leqslant E(g)$,*

*(3) $|E(f)| \leqslant E(|f|)$ dla dowolnej funkcji $f \in L_1(\mu)$.*

*(4) $E$ jest kontrakcją, a dokładniej $\|E\| = 1$.*

*(5) $E$ jest wierny, czyli $f \geqslant 0$ i $E(f) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $f \geqslant 0$ jest nieujemna. Wtedy wzór $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$, $A \in \mathcal{G}$, definiuje miarę na $\sigma$-algebrze $\mathcal{G}$. Na mocy Twierdzenia 3.23 istnieje pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{G}}}$. Zatem w świetle Twierdzenia 4.3, $E(f) := \frac{d\nu}{d\mu|_{\mathcal{G}}}$ jest WWO $f$ względem $\mathcal{G}$, oraz WWO $E(f)$ jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do zbiorów miary zero. Jeśli $f$ jest dowolna, to $f = f^+ - f^-$, gdzie $f^\pm$, $f^- \geqslant 0$ są nieujemne i „żyją na rozłącznych zbiorach”, tzn. $f^+ \cdot f^- = 0$. Z poprzedniego kroku wiemy, że $E(f^+)$ i $E(f^-)$ istnieją. Kładąc $E(f) := E(f^+) - E(f^-)$ otrzymujemy funkcję $\mathcal{G}$-mierzalną i dowolnego $A \in \mathcal{G}$ mamy

$$\int_A E(f)\, d\mu = \int_A E(f^+)\, d\mu - \int_A E(f^-)\, d\mu = \int_A f^+\, d\mu - \int_A f^-\, d\mu = \int_A f\, d\mu.$$

Czyli $E(f)$ jest WWO $f$ względem $\mathcal{G}$. Jednoznaczność $E(f)$ można wykazać identycznie jak w dowodzie Twierdzenia 4.3. W szczególności otrzymujemy stąd dodatniość $E$, czyli warunek (1).

Liniowość operatora $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu|_{\mathcal{G}}) \subseteq L_1(\mu)$ wynika natychmiast z liniowości całki. Mianowicie, niech $f, g \in L_1(\mu)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy $\alpha E(f) + \beta E(g)$ jest funkcją $\mathcal{G}$-mierzalną jako kombinacja liniowa funkcji $\mathcal{G}$-mierzalnych. Ponadto, dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ mamy

$$\begin{aligned}\int_A \alpha E(f) + \beta E(g)\, d\mu &= \alpha \int_A E(f)\, d\mu + \beta \int_A E(g)\, d\mu \\ &= \alpha \int_A f\, d\mu + \beta \int_A g\, d\mu \\ &= \int_A \alpha f + \beta g\, d\mu.\end{aligned}$$

Zatem $\alpha E(f)+\beta E(g)$ jest WWO dla $\alpha g+\beta f$. Czyli $\alpha E(f)+\beta E(g) = E(\alpha f+\beta g)$. To dowodzi liniowości $E$.

Jeśli $f \in L_1(\mu|_{\mathcal{G}})$, to $f$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna i wtedy $E(f) = f$. Zatem $E$ jest identycznością na swoim obrazie $L_1(\mu|_{\mathcal{G}})$, czyli jest rzutem na $L_1(\mu|_{\mathcal{G}})$.

(1). Jeśli $f \geqslant 0$, to dla każdego $A \in \mathcal{G}$ całka $\int_A E(f)\, d\mu = \int_A f\, d\mu \geqslant 0$ jest nieujemna, i skoro $E(f)$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna, to $E(f)$ jest nieujemna $\mu$-prawie wszędzie. Czyli $E(f) \geqslant 0$ w $L_1(\mu)$.

(2). Jeśli $f \leqslant g$, to $g - f \geqslant 0$, a stąd $E(g - f) \geqslant 0$, na mocy (1). Zatem $E(f) \leqslant E(g)$, bo $E$ jest operatorem liniowym.

(3). Z monotoniczności $E$ oraz relacji $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ otrzymujemy $-E(|f|) \leqslant E(f) \leqslant E(|f|)$, co oznacza, że $|E(f)| \leqslant E(|f|)$.

(4). Korzystając nierówności $|E(f)| \leqslant E(|f|)$, monotoniczności całki oraz stąd, że $\Omega \in \mathcal{G}$ mamy

$$\|E(f)\|_1 = \int_\Omega |E(f)|\ d\mu \leqslant \int_\Omega E(|f|)\, d\mu = \int_\Omega |f| d\mu = \|f\|_1.$$

Zatem $E$ jest kontrakcją, czyli $\|E\| \leqslant 1$. Jako, że $E$ jest niezerowym rzutem, to $\|E\| \geqslant 1$. Czyli ostatecznie $\|E\| = 1$.

(5). Skoro $E$ jest operatorem liniowym, to $E(0) = 0$. Jeśli $f \geqslant 0$ i $E(f) = 0$, to z dodatniości $E$ mamy $0 \leqslant E(0) \leqslant E(f) = 0$, stąd $f = 0$. □

## 4.2 Operatory kompozycji

Niech $(\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ będzie ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych. Niech $\varphi : \Omega \to \Omega$ będzie odwzorowaniem mierzalnym. Wtedy wzór

$$\mu \circ \varphi^{-1}(A) := \mu(\varphi^{-1}(A)), \qquad A \in \Sigma,$$

definiuje miarę $\mu \circ \varphi^{-1} : \Sigma \to [0, \infty]$, którą nazywamy *popchnięciem* miary $\mu$ za pomocą $\varphi$.

**Lemat 4.6** (Zamiana zmiennych I)**.** *Funkcja $f : \Omega \to \mathbb{F}$ jest $\mu\circ\varphi^{-1}$-całkowalna wtedy i tylko wtedy $f \circ \varphi$ jest $\mu$-całkowalna, oraz wtedy*

$$\int f\, d\mu \circ \varphi^{-1} = \int f \circ \varphi\, d\mu.$$

Dowód. Wykorzystamy metodę stopniowej komplikacji.

(i) Niech $f = \mathbb{1}_A$ dla $A \in \Sigma$. Zauważmy, że

$$\int_\Omega f \circ \varphi\, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_A \circ \varphi\, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}\, \mathrm{d}\mu = \int_{\varphi^{-1}(A)} \mathrm{d}\mu$$
$$= \mu \circ \varphi^{-1}(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A\, \mathrm{d}\mu \circ \varphi^{-1} = \int_\Omega f\, \mathrm{d}\mu \circ \varphi^{-1}.$$

Zatem o ile pierwsza lub ostatnia całka jest skończona, to mamy tezę.

(ii) Niech $f = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$, będzie funkcją prostą. Wtedy na mocy (i) mamy

$$\int_\Omega f \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \right) \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu$$
$$= \sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \, \mathrm{d}\mu \circ \varphi^{-1} = \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \right) \mathrm{d}\mu \circ \varphi^{-1} = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \circ \varphi^{-1},$$

oraz analogicznie jak w (i) otrzymujemy tezę.

(iii) Niech $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, gdzie $f_n$ jest funkcją prostą. Korzystając z (ii) i Twierdzenia 1.1 (Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej) otrzymujemy

$$\int_\Omega f \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \circ \varphi \mathrm{d}\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \circ \varphi^{-1} = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \circ \varphi^{-1} = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \circ \varphi^{-1},$$

oraz analogicznie jak w (i) otrzymujemy tezę.

□

Funkcje mierzalne o wartościach w $\mathbb{F}$, tworzą przestrzeń liniową nad $\mathbb{F}$. *Operatorem kompozycji* dany wzorem

$$(T_\varphi f)(x) := f(\varphi(x)),$$

gdzie $f : \Omega \to \mathbb{F}$ jest funkcją mierzalną, jest odwzorowaniem liniowym na przestrzeni funkcji mierzalnych. W przypadku, gdy miara $\mu$ jest $\sigma$-skończona, warunki na to, kiedy operator kompozycji jest operatorem ograniczonym na przestrzeniach $L_p(\mu)$ są dobrze znane, patrz [14]. Następujące Twierdzenie uogólnia je na przypadek dowolnych miar. Jak zawsze

$$\mathcal{F}_\mu = \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\}$$

oznacza pierścień zbiorów o $\mu$-mierze skończonej.

**Twierdzenie 4.7** (Uogólnione Twierdzenie Ridge'a [14])**.** *Dla dowolnej miary $\mu$ i dowolnego $p \in [1, \infty)$ operator kompozycji $T_\varphi$ jest poprawnie określonym operatorem ograniczonym $T_\varphi : L_p(\mu) \to L_p(\mu) \iff \mu \circ \varphi^{-1} \ll \mu$ i quasi-pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\mu\circ\varphi^{-1}}{d\mu} = \{f_A\}_{A\in\mathcal{F}_\mu}$ jest istotnie ograniczona w sensie, że*

$$\left\| \frac{d\mu \circ \varphi^{-1}}{d\mu} \right\|_\infty := \sup_{A\in\mathcal{F}_\mu} \operatorname{ess\,sup} f_A < \infty.$$

*Ponadto, wtedy $\|T_\varphi\| = \left\| \frac{d\mu\circ\varphi^{-1}}{d\mu} \right\|_\infty^{\frac{1}{p}}$.*

Dowód. „$\Longrightarrow$". Jeśli $\mu(A) = 0$, to $\mathbb{1}_A = 0$ w $L_p(\mu)$. A zatem jeśli $T_\varphi$ poprawnie określony operator liniowy, to $T_\varphi \mathbb{1}_A = 0$. Ale

$$T_\varphi \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}.$$

Zatem $\mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)} = 0$ w $L_p(\mu)$, czyli $\mu(\varphi^{-1}(A)) = 0$. Stąd $\mu \circ \varphi^{-1} \ll \mu$. Ponadto, dla $A \in \mathcal{F}_\mu$ mamy $\|\mathbb{1}_A\|_p^p = \mu(A)$ oraz dla każdego mierzalnego $B \subseteq A$

$$\int_B f_A \, d\mu = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \|\mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}\|_p^p = \|T_\varphi \mathbb{1}_B\|_p^p \leqslant \|T_\varphi\|^p \|\mathbb{1}_B\|_p^p = \|T_\varphi\|^p \mu(B).$$

Stąd $\|f_A\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} f_A \leqslant \|T_\varphi\|^p$. Zatem $\left\| \frac{d\mu\circ\varphi^{-1}}{d\mu} \right\|_\infty \leqslant \|T_\varphi\|^p$.

„$\Longleftarrow$". Niech $f \in L_p(\mu)$ będzie funkcją charakterystyczną $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$, gdzie $\{A_k\}_{k=1}^n$ są parami rozłączne. Z całkowalności $f$ wynika, że $A_k \in \mathcal{F}_\mu$, dla $k = 1, ..., n$. Zatem korzystając z Lematu 4.6 i naszych założeń mamy

$$\begin{aligned} \|T_\varphi f\|_p^p &= \int_\Omega \sum_{k=1}^n |a_k|^p \cdot \mathbb{1}_{A_k} \circ \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^n |a_k|^p \int_\Omega \mathbb{1}_{A_k} \, d(\mu \circ \varphi^{-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^p (\mu \circ \varphi^{-1})(A_k) = \sum_{k=1}^n |a_k|^p \int_{A_k} f_{A_k} \, d\mu \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n |a_k|^p \mu(A_k) \cdot \left\| \frac{d\mu \circ \varphi^{-1}}{d\mu} \right\|_\infty = \|f\|_p^p \cdot \left\| \frac{d\mu \circ \varphi^{-1}}{d\mu} \right\|_\infty . \end{aligned}$$

Czyli $T_\varphi$ jest poprawnie określonym operatorem ograniczonym na przestrzeni funkcji charakterystycznych $M \subseteq L_p(\mu)$ oraz na tej przestrzeni jego norma nie przekracza $\left\| \frac{d\mu\circ\varphi^{-1}}{d\mu} \right\|_\infty^{\frac{1}{p}}$. Jako że $M$ jest gęstą podprzestrzenią $L_p(\mu)$, to operator $T_\varphi : M \to M$ przedłuża się jednoznacznie do operatora ograniczonego $T_\varphi : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ oraz $\|T_\varphi f\|_p \leqslant \left\| \frac{d\mu\circ\varphi^{-1}}{d\mu} \right\|_\infty^{\frac{1}{p}}$. □

**Uwaga 4.8.** Jeśli miara $\mu$ jest lokalizowalna, to quasi-pochodna Radona-Nikodyma $\{f_A\}_{A \in \mathcal{F}_\mu}$ w powyższym twierdzeniu pochodzi od funkcji $\frac{d\mu\circ\varphi^{-1}}{d\mu}$ oraz supremum istotne funkcji $\frac{d\mu\circ\varphi^{-1}}{d\mu}$ i quasi-funkcji $\{f_A\}_{A \in \mathcal{F}_\mu}$ pokrywają się.

*Odwozorowanie $\varphi$ zachowuje miarę $\mu$* jeżeli $\mu \circ \varphi^{-1} = \mu$, tzn. dla każdego $A \in \Sigma$ mamy $\mu(\varphi^{-1}(A)) = \mu(A)$. Jest to dobrze ustalone pojęcie w teorii miar $\sigma$-skończonych. Dla ogólniejszych miar można je sformułować jak następuje:

**Definicja 4.9.** Powiemy, że $\varphi$ *quasi-zachowuje miarę* $\mu$ jeżeli $\mu \circ \varphi^{-1}|_{\mathcal{F}_\mu} = \mu|_{\mathcal{F}_\mu}$, tzn. dla każdego $A \in \Sigma$ takiego, że $\mu(A) < \infty$ mamy $\mu(\varphi^{-1}(A)) = \mu(A)$.

**Uwaga 4.10.** Oczywiście, jeśli $\varphi$ zachowuje miarę, to tym bardziej quasi-zachowuje miarę. Dla miar $\sigma$-skończonych pojęcia te są sobie równoważne. Rzeczywiście, jeśli $\varphi$ quasi zachowuje miarę $\mu$ oraz istnieje przeliczalne rozbicie $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Sigma$ przestrzeni $\Omega$ na zbiory o mierze skończonej, to dla każdego $A \in \Sigma$ mamy

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^\infty \mu(A \cap A_n) = \sum_{n=0}^\infty \mu(\varphi^{-1}(A \cap A_n)) = \mu(\bigsqcup_{n=0}^\infty \varphi^{-1}(A \cap A_n)) = \mu(\varphi^{-1}(A)).$$

**Przykład 4.11.** Rozważmy miarą trywialną, tzn. niech $\mu(A) = \infty$ jeśli $A \neq \emptyset$. Wtedy odwzorowanie $\varphi : \Omega \to \Omega$ zachowuje miarę $\mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi$ jest surjekcją. Natomiast każde odwozorowanie $\varphi$ w trywialny sposób quasi-zachowuje miarę $\mu$.

**Stwierdzenie 4.12.** *Operator kompozycji $T_\varphi : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ jest poprawnie określoną izometrią $\iff$ $\varphi$ quasi-zachowuje miarę $\mu$.*

Dowód. Z jednej strony, jeżeli $T_\varphi$ jest izometrią, to zachodzi $\|T_\varphi f\|_p = \|f\|_p$ dla $f \in L_p(\mu)$. Jeżeli $A \in \mathcal{F}_\mu$, to $\mathbb{1}_A \in L_p(\mu)$ i wtedy

$$\mu(\varphi^{-1}(A)) = \|\mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}\|_p^p = \|\mathbb{1}_A \circ \varphi\|_p^p = \|T_\varphi \mathbb{1}_A\|_p^p = \|\mathbb{1}_A\|_p^p = \mu(A).$$

Czyli $\varphi$ quasi-zachowuje miare $\mu$.

Z drugiej strony dla każdej nieujemnej całkowalnej funkcji prostej $f$ mamy $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$, gdzie $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}_\mu$ są parami rozłączne oraz $a_i > 0$, $i = 1, ..., n$. Zatem jeśli $\varphi$ quasi-zachowuje miarę, to

$$\begin{aligned}\|T_\varphi f\|_p^p &= \| \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}\right) \circ \varphi\|_p^p = \|\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A_i)}\|_p^p = \sum_{i=1}^n a_i^p \mu(\varphi^{-1}(A_i))^p \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^p \mu(A_i)^p = \|\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}\|_p^p = \|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Czyli $T_\varphi$ jest poprawnie określoną izometrią na przestrzeni funkcji prostych $S(\mu) \subseteq L_p(\mu)$. Jako że $S(\mu)$ jest gęstą podprzestrzenią $L_p(\mu)$, to operator $T_\varphi : S(\mu) \to S(\mu)$ przedłuża się jednoznacznie do operatora izometrycznego $T_\varphi : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$. □

**Uwaga 4.13.** Zauważmy, że $\varphi$ quasi-zachowuje miarę $\mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu \circ \varphi^{-1} \ll \mu$ oraz quasi-pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\mu\circ\varphi^{-1}}{d\mu}$ pochodzi od funkcji stale równej 1.

## 4.3 Izometryczne ważone operatory przesunięcia

Niech $(\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech $\varphi : \Omega \to \Omega$ będzie odwzorowaniem mierzalnym.

**Definicja 4.14.** Powiemy, że $\varphi$ jest *$\mu$-prawie surjekcją* jeśli dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subseteq \Omega \setminus \varphi(\Omega)$ mamy $\mu(A) = 0$, czyli nie ma zbiorów o niezerowej mierze poza obrazem $\varphi(\Omega)$.

Zauważmy, że rodzina

$$\varphi^{-1}(\Sigma) := \{\varphi^{-1}(A) : A \in \Sigma\}$$

jest $\sigma$-podalgebrą $\sigma$-algebry $\Sigma$. Dla każdej $\Sigma$-mierzalnej funkcji $f : \Omega \to \mathbb{F}$ funkcja $f \circ \varphi : \Omega \to \mathbb{F}$ jest $\varphi^{-1}(\Sigma)$-mierzalna.

**Lemat 4.15.** *Wzór*
$$(\mu \circ \varphi)(\varphi^{-1}(A)) := \mu(A)$$
*definiuje miarę* $\mu\circ\varphi : \varphi^{-1}(\Sigma) \to [0,\infty]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\varphi$ *jest* $\mu$*-prawie surjekcją.*

Dowód. Jeśli $\mu \circ \varphi$ poprawnie określona, to $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(B)$ implikuje $\mu(A) = \mu(B)$ dla każdych $A, B \in \Sigma$. W szczególności, jeśli $A \subseteq \Omega \setminus \varphi(\Omega)$, to $\varphi^{-1}(A) = \emptyset = \varphi^{-1}(\emptyset)$, czyli $\mu(A) = \mu(\emptyset) = 0$. Zatem $\varphi$ jest $\mu$-prawie surjekcją.

Załóżmy teraz, że $\varphi$ jest $\mu$-prawie surjekcją. Dla dowolnych $A, B \in \Sigma$ takich, że $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(B)$ mamy $A\cap\varphi(\Omega) = B\cap\varphi(\Omega)$, skąd $A\setminus B, B\setminus A \subseteq \Omega \setminus \varphi(\Omega)$. Zatem $\mu(A\triangle B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = 0$ i w konsekwencji $\mu(A) = \mu(B)$. Czyli funkcja $\mu \circ \varphi$ poprawnie określona. Ponadto, $\mu \circ \varphi(\emptyset) = \mu(\varphi^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ oraz jeśli zbiory $\{\varphi^{-1}(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \varphi^{-1}(\Sigma)$, są parami rozłączne, to zbiory $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ są parami rozłączne z dokładnością do zbiorów miary zero, tzn. dla $m \neq n$ mamy
$$\begin{aligned}\mu(A_n \cap A_m) &= (\mu\circ\varphi)(\varphi^{-1}(A_n \cap A_m)) = (\mu\circ\varphi)(\varphi^{-1}(A_n)\cap\varphi^{-1}(A_m))\\ &= (\mu\circ\varphi)(\emptyset) = 0.\end{aligned}$$
Stąd
$$(\mu\circ\varphi)(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\varphi^{-1}(A_n)) = (\mu\circ\varphi)(\varphi^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$
Czyli $(\mu \circ \varphi)$ jest miarą. □

**Uwaga 4.16.** Miarę $\mu \circ \varphi$, która istnieje, gdy $\varphi$ jest $\mu$-prawie surjekcją, nazywamy *cofnięciem miary* $\mu$ za pomocą $\varphi$.

**Lemat 4.17** (Zamiana zmiennych II)**.** *Załóżmy, że* $\varphi$ *jest* $\mu$*-prawie surjekcją. Funkcja* $f : \Omega \to \mathbb{F}$ *jest* $\mu$*-całkowalna wtedy i tylko wtedy* $f \circ \varphi$ *jest* $\mu\circ\varphi$*-całkowalna, oraz wtedy*
$$\int f\,d\mu = \int f\circ\varphi\,d(\mu\circ\varphi).$$

Dowód. Wykorzystamy metodę stopniowej komplikacji.

(i). Niech $f = \mathbb{1}_A$ dla $A \in \Sigma$. Zauważmy, że
$$\begin{aligned}\int_\Omega f\circ\varphi\,\mathrm{d}(\mu\circ\varphi) &= \int_\Omega \mathbb{1}_A\circ\varphi\,\mathrm{d}(\mu\circ\varphi) = \int_\Omega \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}\,\mathrm{d}(\mu\circ\varphi)\\ &= \mu\circ\varphi\left(\varphi^{-1}(A)\right) = \mu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$
Zatem o ile pierwsza lub ostatnia całka jest skończona, to mamy tezę.

(ii). Niech $f = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$, będzie funkcją prostą. Wtedy na mocy (i) mamy

$$\int_\Omega f \circ \varphi \, \mathrm{d}(\mu \circ \varphi) = \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \right) \circ \varphi \, \mathrm{d}(\mu \circ \varphi) = \sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \circ \varphi \, \mathrm{d}(\mu \circ \varphi)$$
$$= \sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \right) \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu,$$

oraz analogicznie jak w(i) otrzymujemy tezę.

(iii). Niech $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, gdzie $f_n$ jest funkcją prostą. Korzystając z (ii) i Twierdzenia 1.1 (Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej) otrzymujemy

$$\int_\Omega f \circ \varphi \, \mathrm{d}(\mu \circ \varphi) = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \circ \varphi \, \mathrm{d}(\mu \circ \varphi) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \circ \varphi \mathrm{d}(\mu \circ \varphi)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu,$$

oraz analogicznie jak w (i) otrzymujemy tezę. □

**Twierdzenie 4.18.** *Dla dowolnej miary $\mu$, dowolnego $p \in [1, \infty)$ i funkcji mierzalnych $\varphi : \Omega \to \Omega$ oraz $\varrho : \Omega \to \mathbb{F}$, gdzie $\mu(A) = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\varphi^{-1}(A)) = \infty$, ważony operator kompozycji*

$$[\varrho T_\varphi(f)](x) := \varrho(x) f(\varphi(x)),$$

*jest poprawnie określoną izometrią $\varrho T_\varphi : L_p(\mu) \to L_p(\mu) \iff \varphi$ jest $\mu$-prawie surjekcją $\mu \circ \varphi \ll \mu|_{\varphi^{-1}(\Sigma)}$ oraz quasi-pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\mu\circ\varphi}{d\mu|_{\varphi^{-1}(\Sigma)}}$ jest związana z $\varrho$ zależnością*

$$E(|\varrho|^p \cdot \mathbb{1}_B | \varphi^{-1}(\Sigma)) = \frac{d\mu \circ \varphi}{d\mu|_{\varphi^{-1}(\Sigma)}} \cdot \mathbb{1}_B, \qquad B \in \mathcal{F}_{\mu|_{\varphi^{-1}(\Sigma)}}.$$

Dowód. Nasze założenie na $\varphi$ oznacza, że $\mathcal{F}_{\mu|_{\varphi^{-1}(\Sigma)}} = \{\varphi^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}_\mu\}$.

„$\Longrightarrow$". Jeśli $A \in \mathcal{F}_\mu$, to $\mathbb{1}_A \in L_p(\mu)$ i stąd, że $\varrho T_\varphi$ jest izometrią, to

$$\mu(A) = \|\mathbb{1}_A\|_p^p = \|\varrho T_\varphi \mathbb{1}_A\|_p^p = \int_{\varphi^{-1}(A)} |\varrho|^p \, d\mu.$$

Dla dowolnego mierzalnego $A \subseteq \Omega \setminus \varphi(\Omega)$ mamy $\mu(A) = 0$. Rzeczywiście, $\varphi^{-1}(A) = \emptyset$ implikuje, że $A \in \mathcal{F}_\mu$ (bo $\mu(\varphi(A)) = 0 < \infty$) i wtedy powyższa równość implikuje, że $\mu(A) = 0$. Czyli $\varphi$ jest $\mu$-prawie surjekcją. Co więcej, skoro dla $A \in \mathcal{F}_\mu$ mamy

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} |\varrho|^p \, d\mu = \mu(A) = (\mu \circ \varphi)(\varphi^{-1}(A)),$$

to $\mu \circ \varphi \preceq \mu|_{\varphi^{-1}(\Sigma)}$ oraz $E(|\varrho|^p \cdot \mathbb{1}_B | \varphi^{-1}(\Sigma)) = \frac{d\mu\circ\varphi}{d\mu|_{\varphi^{-1}(\Sigma)}} \cdot \mathbb{1}_B$, dla $B = \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{F}_{\mu|_{\varphi^{-1}(\Sigma)}}$.

„$\Longleftarrow$". Niech $f \in L_p(\mu)$ będzie funkcją prostą $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$, gdzie $\{A_k\}_{k=1}^n$ są parami rozłączne. Z całkowalności $f$ wynika, że $A_k \in \mathcal{F}_\mu$, dla $k = 1, ..., n$. Zatem

$$\begin{aligned}\|\varrho T_\varphi f\|_p^p &= \int_\Omega \sum_{k=1}^n |a_k|^p |\varrho|^p \cdot \mathbb{1}_{A_k} \circ \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^n |a_k|^p \int_{\varphi^{-1}(A_k)} |\varrho|^p \, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^p \int_{\varphi^{-1}(A_k)} \frac{d\mu \circ \varphi}{d\mu|_{\varphi^{-1}(\Sigma)}} \, d\mu = \sum_{k=1}^n |a_k|^p \mu(A_k) = \|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Czyli $\varrho T_\varphi$ jest poprawnie określona izometrią na przestrzeni funkcji prostych $S(\mu) \subseteq L_p(\mu)$. Jako że $S(\mu)$ jest gęstą podprzestrzenią $L_p(\mu)$, to operator $T_\varphi : S(\mu) \to L_p(\mu)$ przedłuża się jednoznacznie do operatora izometrycznego $T_\varphi : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$. $\square$

# Rozdział 5

# Bibliografia


[1] Ando T., Contractive projections in $L_p$ spaces, Pacific J. Math. 17 (1966) 391.

[2] Billingsley P., Prawdopodobieństwo i miara, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1987.

[3] Conway J.B., A Course in Functional Analysis, Springer, 1997.

[4] Douglas R. G., Contractive projections on an $L_1$ space, Pacific J. Math.15 (1965) 443.

[5] Fremlin D.H., Measure theory Volume 2, Torres Fremlin, 2010.

[6] E. Gardella, *A modern look at algebras of operators on $L_p$-spaces*, To appear in Expo. Math. preprint, arxiv.org/abs/1909.12096

[7] Halmos P.R., Measure Theory, Springer, 1974.

[8] Lamperti J., *On the isometries of certain function-spaces.* Pacific J. Math. Volume 8, Number 3 (1958), 459-466.

[9] Jakubowski J., Sztencel R., Wstęp do teorii prawdopodobieństwa, Script, 2010.

[10] Lamperti J., *On the isometries of certain function-spaces.* Pacific J. Math. Volume 8, Number 3 (1958), 459-466.

[11] Lewin J., Lewin M., *A reformulation of the Radon-Nikodym Theorem* Proc. Amer. Math. Soc. **47**, No. 2 (1975), 393-400.

[12] Musielak J., Wstęp do analizy funkcjonalnej, PWN, 1976

[13] Rao M. M., Measure Theory and Integration, CRC Press, 2004.

[14] Ridge W. C., *Spectrum of a composition operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **37** (1973), 121–127.

[15] Rudin W., Analiza funkcjonalna, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.

[16] Rudin W., Analiza rzeczywista i zespolona, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1986.

[17] Samuels S. M., The Radon-Nikodym Theorem as a Theorem in Probability, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 3 (Mar., 1978), pp. 155-165.

[18] Segal I. E., *Equivalences of measure spaces*, Amer. J. Math. **73** (1951), 275-313.

[19] Traczyk T., Wstęp do teorii algebr Boole'a, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.

[20] Zaanen A. C., *The Radon-Nikodym theorem. I, II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64 = Indag. Math. **23** (1961), 157-187.